

C E E J A



MUNDO DO
TRABALHO

MATEMÁTICA

CADERNO DO ESTUDANTE

ENSINO MÉDIO
VOLUME 3

Nos Cadernos do Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho/CEEJA são indicados sites para o aprofundamento de conhecimentos, como fonte de consulta dos conteúdos apresentados e como referências bibliográficas. Todos esses endereços eletrônicos foram verificados. No entanto, como a internet é um meio dinâmico e sujeito a mudanças, a Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação não garante que os sites indicados permaneçam acessíveis ou inalterados após a data de consulta impressa neste material.

A Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação autoriza a reprodução do conteúdo do material de sua titularidade pelas demais secretarias do País, desde que mantida a integridade da obra e dos créditos, ressaltando que direitos autorais protegidos* deverão ser diretamente negociados com seus próprios titulares, sob pena de infração aos artigos da Lei nº 9.610/98.

* Constituem "direitos autorais protegidos" todas e quaisquer obras de terceiros reproduzidas neste material que não estejam em domínio público nos termos do artigo 41 da Lei de Direitos Autorais.

Matemática : caderno do estudante. São Paulo: Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação (SDECTI) : Secretaria da Educação (SEE), 2015.
il. - - (Educação de Jovens e Adultos (EJA) : Mundo do Trabalho modalidade semipresencial, v. 3)

Conteúdo: v. 3. 3ª série do Ensino Médio.

ISBN: 978-85-8312-155-8 (Impresso)

978-85-8312-131-2 (Digital)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Ensino Médio. 3. Modalidade Semipresencial. I. Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação. II. Secretaria da Educação. III. Título.

CDD: 372.5

FICHA CATALOGRÁFICA

Tatiane Silva Massucato Arias – CRB-8 / 7262



GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

Geraldo Alckmin

Governador

**Secretaria de Desenvolvimento Econômico,
Ciência, Tecnologia e Inovação**

Márcio Luiz França Gomes

Secretário

Cláudio Valverde

Secretário-Adjunto

Maurício Juvenal

Chefe de Gabinete

Marco Antonio da Silva

*Coordenador de Ensino Técnico,
Tecnológico e Profissionalizante*

Secretaria da Educação

Herman Voorwald

Secretário

Cleide Bauab Eid Bochixio

Secretária-Adjunta

Fernando Padula Novaes

Chefe de Gabinete

Ghisleine Trigo Silveira

Coordenadora de Gestão da Educação Básica

Mertila Larcher de Moraes

Diretora do Centro de Educação de Jovens e Adultos

Adriana Aparecida de Oliveira, Adriana dos Santos
Cunha, Durcilene Maria de Araujo Rodrigues,
Gisele Fernandes Silveira Farisco, Luiz Carlos Tozetto,
Raul Ravanelli Neto, Sabrina Moreira Rocha,
Virginia Nunes de Oliveira Mendes
Técnicos do Centro de Educação de Jovens e Adultos

Concepção do Programa e elaboração de conteúdos

Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

Coordenação Geral do Projeto
Ernesto Mascellani Neto

Equipe Técnica
Cibele Rodrigues Silva, João Mota Jr. e Raphael Lebsa do Prado

Fundação do Desenvolvimento Administrativo – Fundap

Wanderley Messias da Costa
Diretor Executivo

Márgara Raquel Cunha
Diretora Técnica de Formação Profissional

Coordenação Executiva do Projeto
José Lucas Cordeiro

Coordenação Técnica
Impressos: Dilma Fabri Marão Pichoneri
Vídeos: Cristiane Ballerini

Equipe Técnica e Pedagógica
Ana Paula Alves de Lavos, Carlos Ricardo Bifi, Elen Cristina
S. K. Vaz Döppenschmitt, Emily Hozokawa Dias, Fabiana
de Cássia Rodrigues, Fernando Manzieri Heder, Herbert

Rodrigues, Jonathan Nascimento, Laís Schalch, Liliane
Bordignon de Souza, Maria Helena de Castro Lima, Paula
Marcia Ciacco da Silva Dias, Rodnei Pereira, Selma Borghi
Venco e Walkiria Rigolon

Autores
Arte: Roseli Ventrella e Terezinha Guerra; *Biologia*: José Manoel
Martins, Marcos Egelstein, Maria Graciete Carramate Lopes
e Vinicius Signorelli; *Filosofia*: Juliana Litvin de Almeida e
Tiago Abreu Nogueira; *Física*: Gustavo Isaac Killner; *Geografia*:
Roberto Giansanti e Silas Martins Junqueira; *História*: Denise
Mendes e Márcia Juliana Santos; *Inglês*: Eduardo Portela;
Língua Portuguesa: Kátia Lomba Brakling; *Matemática*: Antonio
José Lopes; *Química*: Olímpio Salgado; *Sociologia*: Dilma Fabri
Marão Pichoneri e Selma Borghi Venco

Gestão do processo de produção editorial

Fundação Carlos Alberto Vanzolini

Mauro de Mesquita Spínola
Presidente da Diretoria Executiva

José Joaquim do Amaral Ferreira
Vice-Presidente da Diretoria Executiva

Gestão de Tecnologias em Educação

Direção da Área
Guilherme Ary Plonski

Coordenação Executiva do Projeto
Angela Sprenger e Beatriz Scavazza

Gestão do Portal
Luis Marcio Barbosa, Luiz Carlos Gonçalves, Sonia Akimoto e
Wilder Rogério de Oliveira

Gestão de Comunicação
Ane do Valle

Gestão Editorial
Denise Blanes

Equipe de Produção
Editorial: Carolina Grego Donadio e Paulo Mendes
Equipe Editorial: Adriana Ayami Takimoto, Airton Dantas
de Araújo, Alícia Toffani, Amarilis L. Maciel, Ana Paula S.
Bezerra, Andressa Serena de Oliveira, Bárbara Odria Vieira,
Carolina H. Mestriner, Caroline Domingos de Souza, Cíntia

Leitão, Cláudia Letícia Vendrame Santos, David dos Santos
Silva, Eloiza Mendes Lopes, Érika Domingues do Nascimento,
Fernanda Brito Bincoletto, Flávia Beraldo Ferrare, Jean Kleber
Silva, Leonardo Gonçalves, Lorena Vita Ferreira, Lucas Puntel
Carrasco, Luiza Thebas, Mainã Greeb Vicente, Marcus Ecclissi,
Maria Inez de Souza, Mariana Padoan, Natália Kessuani Bego
Maurício, Olivia Frade Zambone, Paula Felix Palma, Pedro
Carvalho, Polyanna Costa, Priscila Risso, Raquel Benchimol
Rosenthal, Tatiana F. Souza, Tatiana Pavanelli Valsi, Thaís Nori
Cornetta, Thamires Carolline Balog de Mattos e Vanessa Bianco
Felix de Oliveira

Direitos autorais e iconografia: Ana Beatriz Freire, Aparecido
Francisco, Fernanda Catalão, José Carlos Augusto, Larissa Polix
Barbosa, Maria Magalhães de Alencastro, Mayara Ribeiro de
Souza, Priscila Garofalo, Rita De Luca, Roberto Polacov, Sandro
Carrasco e Stella Mesquita

Apoio à produção: Aparecida Ferraz da Silva, Fernanda Queiroz,
Luiz Roberto Vital Pinto, Maria Regina Xavier de Brito, Natália
S. Moreira e Valéria Aranha

Projeto gráfico-editorial e diagramação: R2 Editorial, Michelangelo
Russo e Casa de Ideias

CTP, Impressão e Acabamento
Imprensa Oficial do Estado de São Paulo

Caro(a) estudante

É com grande satisfação que a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, em parceria com a Secretaria de Desenvolvimento Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação, apresenta os Cadernos do Estudante do Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho para os Centros Estaduais de Educação de Jovens e Adultos (CEEJAs). A proposta é oferecer um material pedagógico de fácil compreensão, que favoreça seu retorno aos estudos.

Sabemos quanto é difícil para quem trabalha ou procura um emprego se dedicar aos estudos, principalmente quando se parou de estudar há algum tempo.

O Programa nasceu da constatação de que os estudantes jovens e adultos têm experiências pessoais que devem ser consideradas no processo de aprendizagem. Trata-se de um conjunto de experiências, conhecimentos e convicções que se formou ao longo da vida. Dessa forma, procuramos respeitar a trajetória daqueles que apostaram na educação como o caminho para a conquista de um futuro melhor.

Nos Cadernos e vídeos que fazem parte do seu material de estudo, você perceberá a nossa preocupação em estabelecer um diálogo com o mundo do trabalho e respeitar as especificidades da modalidade de ensino semipresencial praticada nos CEEJAs.

Esperamos que você conclua o Ensino Médio e, posteriormente, continue estudando e buscando conhecimentos importantes para seu desenvolvimento e sua participação na sociedade. Afinal, o conhecimento é o bem mais valioso que adquirimos na vida e o único que se acumula por toda a nossa existência.

Bons estudos!

Secretaria da Educação

Secretaria de Desenvolvimento
Econômico, Ciência, Tecnologia e Inovação

Estudar na idade adulta sempre demanda maior esforço, dado o acúmulo de responsabilidades (trabalho, família, atividades domésticas etc.), e a necessidade de estar diariamente em uma escola é, muitas vezes, um obstáculo para a retomada dos estudos, sobretudo devido à dificuldade de se conciliar estudo e trabalho. Nesse contexto, os Centros Estaduais de Educação de Jovens e Adultos (CEEJAs) têm se constituído em uma alternativa para garantir o direito à educação aos que não conseguem frequentar regularmente a escola, tendo, assim, a opção de realizar um curso com presença flexível.

Para apoiar estudantes como você ao longo de seu percurso escolar, o Programa Educação de Jovens e Adultos (EJA) – Mundo do Trabalho produziu materiais especificamente para os CEEJAs. Eles foram elaborados para atender a uma justa e antiga reivindicação de estudantes, professores e sociedade em geral: poder contar com materiais de apoio específicos para os estudos desse segmento.

Esses materiais são seus e, assim, você poderá estudar nos momentos mais adequados – conforme os horários que dispõe –, compartilhá-los com sua família, amigos etc. e guardá-los, para sempre estarem à mão no caso de futuras consultas.

Os Cadernos do Estudante apresentam textos que abordam e discutem os conteúdos propostos para cada disciplina e também atividades cujas respostas você poderá registrar no próprio material. Nesses Cadernos, você ainda terá espaço para registrar suas dúvidas, para que possa discuti-las com o professor sempre que for ao CEEJA.

Os vídeos que acompanham os Cadernos do Estudante, por sua vez, explicam, exemplificam e ampliam alguns dos assuntos tratados nos Cadernos, oferecendo informações que vão ajudá-lo a compreender melhor os conteúdos. São, portanto, um importante recurso com o qual você poderá contar em seus estudos.

Além desses materiais, o Programa EJA – Mundo do Trabalho tem um site exclusivo, que você poderá visitar sempre que desejar: <<http://www.ejamundodotrabalho.sp.gov.br>>. Nele, além de informações sobre o Programa, você acessa os Cadernos do Estudante e os vídeos de todas as disciplinas, ao clicar na aba **Conteúdo CEEJA**. Já na aba **Conteúdo EJA**, poderá acessar os Cadernos e vídeos de Trabalho, que abordam temas bastante significativos para jovens e adultos como você.

Os materiais foram produzidos com a intenção de estabelecer um diálogo com você, visando facilitar seus momentos de estudo e de aprendizagem. Espera-se que, com esse estudo, você esteja pronto para realizar as provas no CEEJA e se sinta cada vez mais motivado a prosseguir sua trajetória escolar.

TENHO DÚVIDAS JÁ ESTUDEI **Unidade 1 – Áreas e volumes.....9**Tema 1 – Áreas de polígonos.....9 Tema 2 – Comprimento da circunferência e área do círculo.....19 Tema 3 – Volume de sólidos.....35 **Unidade 2 – Geometria Analítica.....41**Tema 1 – Sistema cartesiano: o ponto.....41 Tema 2 – A equação da reta.....56 Tema 3 – A equação da circunferência.....69 **Unidade 3 – Combinatória.....77**Tema 1 – Problemas de combinatória.....77 Tema 2 – Permutações.....90 Tema 3 – Arranjos e combinações.....98 **Unidade 4 – Probabilidade.....103**Tema 1 – Introdução à Probabilidade.....103 Tema 2 – Roletas e probabilidades geométricas.....117 **Unidade 5 – Trigonometria: primeiras ideias.....127**Tema 1 – Trigonometria do triângulo retângulo.....128 Tema 2 – Relações no ciclo trigonométrico.....140

Caro(a) estudante,

Neste momento, você inicia o Volume 3 de Matemática – Ensino Médio – do CEEJA. Nele, serão abordados alguns assuntos de seu cotidiano. Ao realizar as atividades propostas, você verá que, apesar de inicialmente parecerem complicados, esses assuntos são mais simples do que parecem.

Na Unidade 1, são abordadas áreas de polígonos e círculos, bem como o volume de sólidos. Conhecer essas medidas é necessário em várias situações do cotidiano.

Na Unidade 2, você estudará a Geometria Analítica (GA), que o ajudará a se familiarizar com o plano cartesiano e as maneiras utilizadas para representar pontos, retas e circunferências, entre outras formas geométricas. Por meio da GA, você aprenderá como usar pares ordenados para determinar a posição de pontos, retas e circunferências no plano e terá noção das aplicações desse tipo de conhecimento matemático.

Na Unidade 3, conhecerá a combinatória e perceberá que pode aplicar um tipo especial de raciocínio que o ajudará na resolução de problemas práticos de arranjos, permutações e combinações. À primeira vista, pode parecer que você nunca tenha visto questões de natureza combinatória, mas elas ocorrem em situações e problemas do cotidiano, como nas senhas utilizadas em cadeados, em contas bancárias, entre outros.

Na Unidade 4, você estudará Probabilidade, que envolve a ideia de incerteza, ou seja, as chances de se chegar a um ou outro resultado. No dia a dia, isso é utilizado em previsões do tempo (Qual é a probabilidade de chover hoje?), em jogos (Qual é a probabilidade de um time ganhar?), e assim por diante.

Na Unidade 5, este Caderno se conclui apresentando as primeiras noções de Trigonometria, uma parte da Matemática que, desde a Antiguidade, é usada para calcular distâncias inacessíveis ou determinar medidas de grandezas por meio de métodos como os de comparação de triângulos semelhantes.

Bons estudos!

TEMAS

1. Áreas de polígonos
2. Comprimento da circunferência e área do círculo
3. Volume de sólidos

Introdução

Muitas situações do dia a dia envolvem medidas de área, de capacidade e de volume.

São várias as ocupações em que é preciso calcular perímetros e áreas, como é o caso de pintores, serralheiros, marceneiros, pedreiros, colocadores de pisos e outros profissionais que têm de saber calcular a capacidade de recipientes e determinar o volume de um objeto.

Nesta Unidade, o objetivo é ajudá-lo a se familiarizar com esses procedimentos de cálculo.

Áreas de polígonos **TEMA 1**

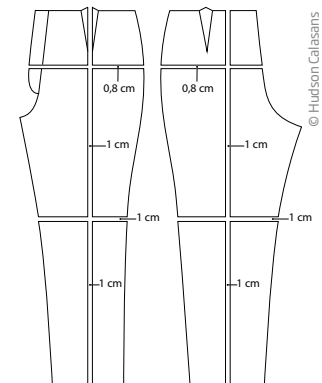
Neste tema, você vai se aprofundar no cálculo de áreas de polígonos, mas antes vai recordar como se calcula a área de figuras simples – como um retângulo.

**O QUE VOCÊ JÁ SABE?**

Você já viu um pedreiro calcular a quantidade de lajotas necessárias para cobrir determinada área de piso ou um pintor calcular a quantidade de tinta necessária para pintar um cômodo? O que esses profissionais precisam saber para efetuar esses cálculos? Só conhecer o tamanho da lajota ou da lata de tinta é suficiente?

**Cálculo de áreas poligonais**

Alfaiates e costureiras precisam saber as medidas do corpo da pessoa para quem vão criar roupas. Essas medidas são importantes para que os profissionais saibam de quantos metros de tecido precisarão, pois elas são usadas para fazer o corte, que, em geral, tem um formato irregular.



Corretores imobiliários também precisam calcular áreas em seu ofício. Nesse caso, o cálculo é mais simples, pois a maioria das habitações é formada por módulos retangulares. Por outro lado, topógrafos e agrimensores medem a superfície de propriedades, como sítios e fazendas, que têm formatos irregulares.

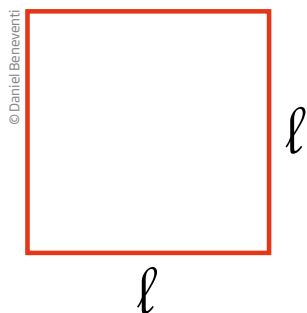
O cálculo de áreas de uma figura plana é simples para determinadas figuras geométricas como retângulos e outros polígonos. Vale a pena revisar alguns métodos e fórmulas que possibilitam determinar a área de certas figuras poligonais.

A mais simples talvez seja a área do retângulo, pois se pode tomar um **quadrado unitário** (1 × 1) como **unidade de área**.

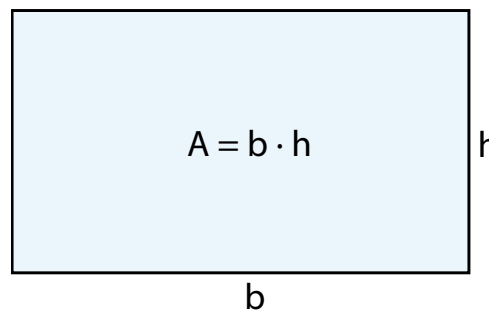
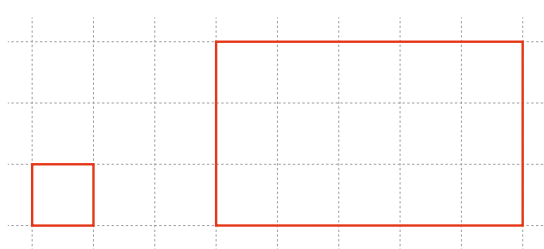
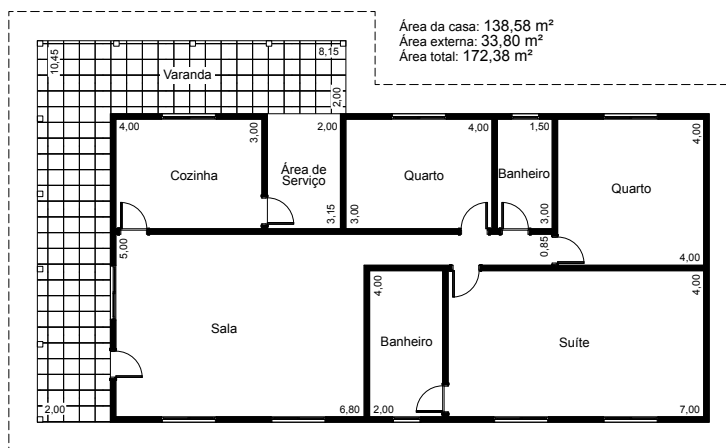
A área do retângulo da figura é $3 \cdot 5 = 15$, que é a quantidade de quadrados unitários que cabe no retângulo.

Generalizando:

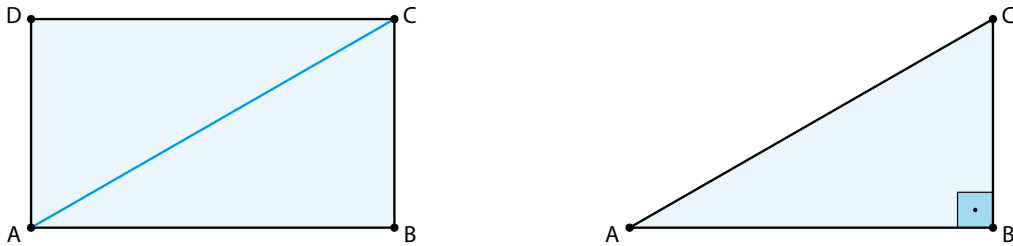
Dado um retângulo de base que mede **b** e altura que mede **h**, a área do retângulo é $A = b \cdot h$.



No caso em que a medida da base é igual à medida da altura, tem-se um quadrado, cuja fórmula simplificada é $A = l \cdot l = l^2$.



Parte-se da área do retângulo de base **b** e altura **h** para encontrar a fórmula da área de um triângulo. A figura a seguir ilustra que qualquer retângulo pode ser decomposto em dois triângulos retângulos iguais. Portanto, a área de um triângulo retângulo é a metade da área de um retângulo de mesma base e mesma altura.

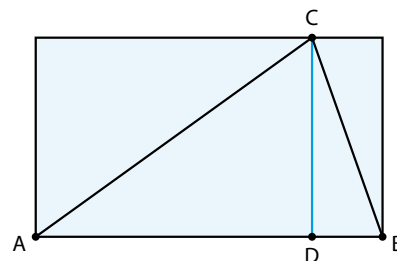
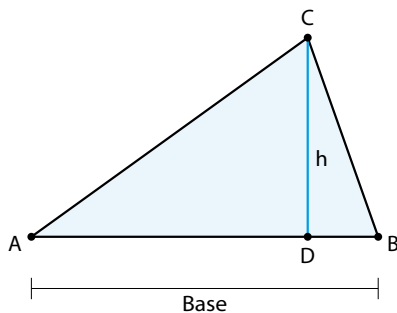


© Sidnei Moura

Essa relação pode ser generalizada e aplicada a quaisquer triângulos, pois é sempre possível desenhar um triângulo cuja base **b** coincida com a base de um retângulo de altura **h** igual à do triângulo em relação a essa base. Observe que o vértice C do triângulo é um ponto que pertence ao lado oposto à base do retângulo.

Então, se a área do retângulo é $A = b \cdot h$, a área do triângulo de mesma base e mesma altura é:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = \frac{b \cdot h}{2}$$

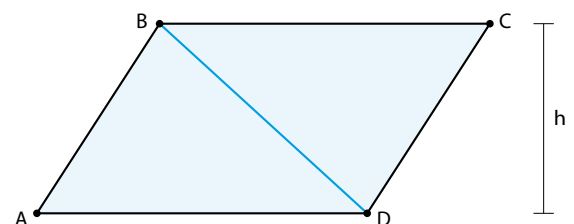


© Sidnei Moura

Para calcular a área de um paralelogramo, parte-se da área do triângulo. Observe as figuras ao lado. É possível decompor um paralelogramo qualquer em dois triângulos congruentes de mesma base e mesma altura que o paralelogramo de origem.

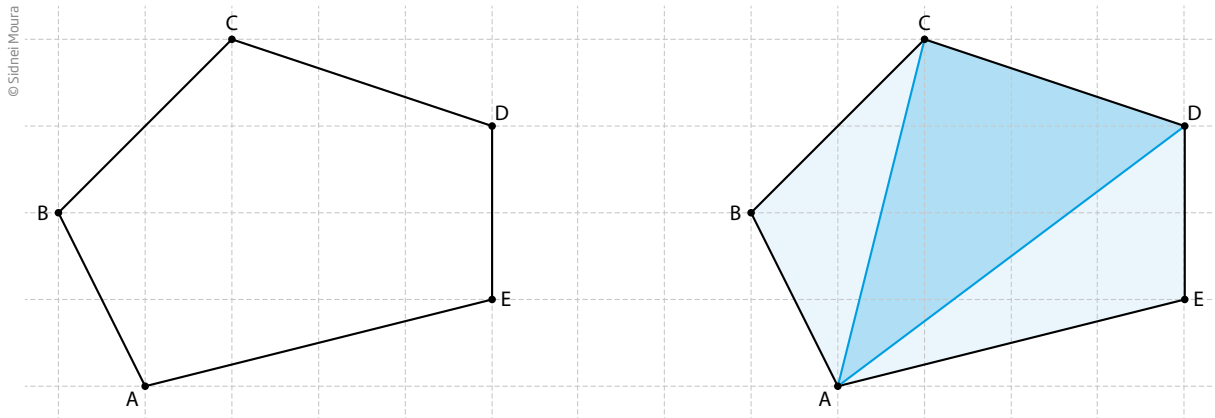
Se a área de cada triângulo é $A = \frac{b \cdot h}{2}$, então a área do paralelogramo é:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = b \cdot h$$



© Sidnei Moura

Para determinar a área de terrenos irregulares, os topógrafos utilizam uma técnica chamada **triangulação**. Nessa técnica, aproxima-se a forma do terreno à de um polígono e decompõe-se o polígono em triângulos, como mostram as figuras a seguir.



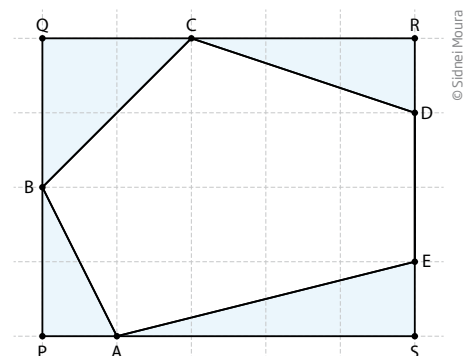
Para calcular a área dos triângulos, os topógrafos utilizam instrumentos de precisão, como o teodolito, que permitem determinar as medidas dos lados e dos ângulos dessas figuras. Eles utilizam fórmulas trigonométricas e programas de computador para determinar a área com a precisão desejada.



Teodolito.



Outra técnica empregada é inserir o polígono em um retângulo, calcular a área do retângulo e subtrair as áreas dos triângulos exteriores ao polígono. Veja na imagem ao lado como é simples determinar a área de um pentágono utilizando esse método.



$$\text{Área do retângulo PQRS} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\text{Área do triângulo APB} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$\text{Área do triângulo BQC} = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$$

$$\text{Área do triângulo CRD} = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1,5$$

$$\text{Área do triângulo ESA} = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$$

$$\text{Área do pentágono ABCDE} = 20 - (1 + 2 + 1,5 + 2) = 20 - 6,5 = 13,5$$



ASSISTA!

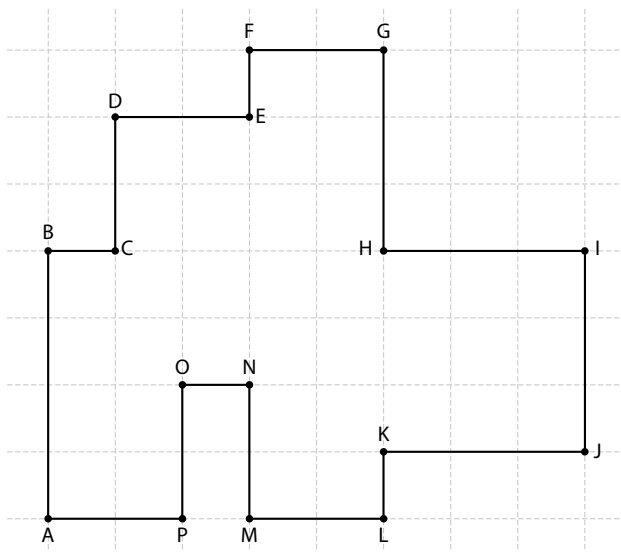
Matemática – Volume 3

Áreas e volumes

Nesse vídeo, abordam-se situações práticas do cotidiano e é possível lembrar para que e como se calculam áreas e volumes de determinadas figuras.

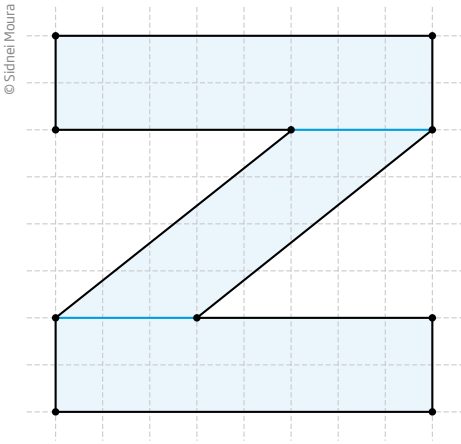
ATIVIDADE 1 Áreas de figuras poligonais

1 Determine a área da figura a seguir, usando o quadrado unitário, na malha quadriculada, como unidade de medida.



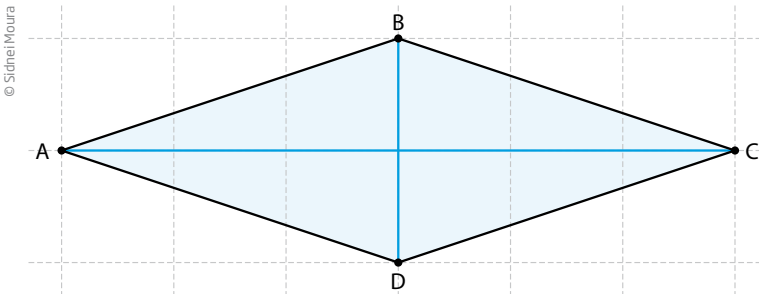
© Sidnei Moura

2 Determine a área da letra Z, usando o quadrado unitário, na malha quadriculada, como unidade de medida.

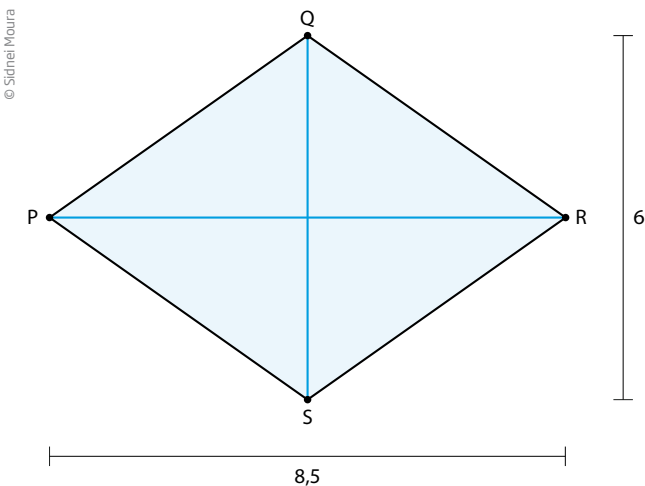


3 Um losango é um quadrilátero que tem todos os lados de mesma medida e suas diagonais perpendiculares. Calcule a área dos losangos.

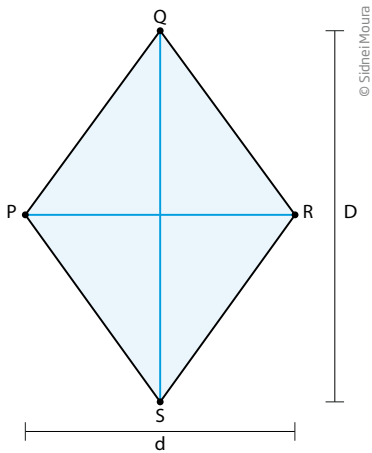
a) Use o quadrado da malha quadriculada como unidade de medida.



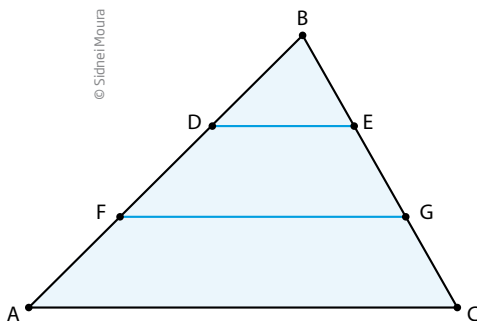
b) Observe que os segmentos indicam as medidas das diagonais menor e maior.



c) Observe que, no losango PQRS, as diagonais estão indicadas por D (diagonal maior) e d (diagonal menor).

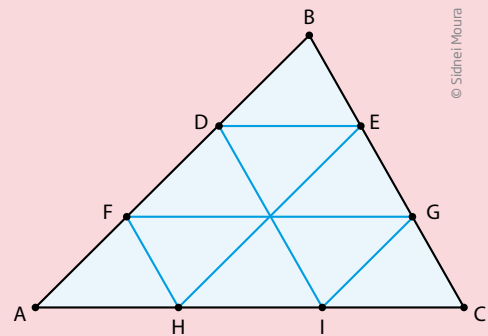


4 A área do triângulo ABC é 90 cm^2 . Dois segmentos de reta paralelos à base cortaram os lados AB e BC em três partes iguais. Determine a medida da área do trapézio que fica no meio.

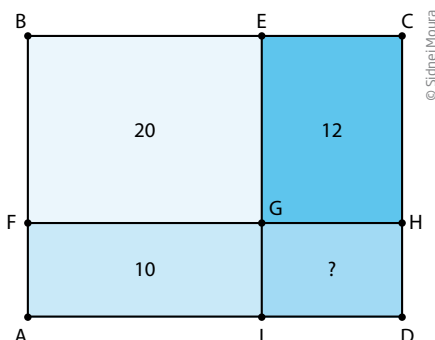


DICA!

Observe abaixo a decomposição do triângulo ABC em 9 triângulos congruentes.



5 Na figura a seguir, os números indicam a área de cada retângulo. Descubra qual é o valor da área do retângulo HGID.



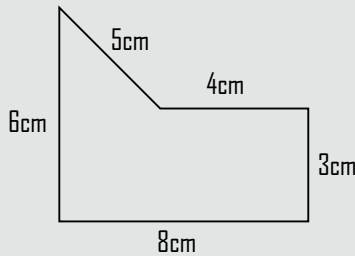
DICA!

Decomponha os números 20, 10 e 12 e tente descobrir as medidas dos lados de cada retângulo interno.



DESAFIO

A área da figura abaixo é:



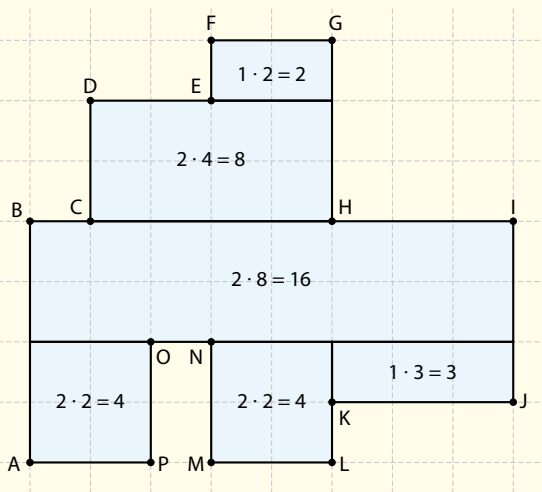
- a) 24 cm^2
- b) 30 cm^2
- c) 33 cm^2
- d) 36 cm^2
- e) 48 cm^2

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ), 2008. Disponível em: <http://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/2008-2/download/provas/VEST2008-2PUCRio_OUTROS_CURSOS_TARDE.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Áreas de figuras poligonais

1 Basta calcular o número de quadrados unitários que formam a figura. Um modo de fazer é dividir a figura em retângulos, calcular a área de cada um deles e somá-las.



$$A = 2 + 8 + 16 + 4 + 4 + 3 = 37$$

A área da figura é 37.

2 Área de cada um dos retângulos da base e do topo de Z $\rightarrow 2 \cdot 8 = 16$

Área do paralelogramo da diagonal de Z $\rightarrow 3 \cdot 4 = 12$

Área total de Z $\rightarrow 16 + 12 + 16 = 44$

Também é possível determinar a área da letra Z calculando a área do quadrado menos a área dos dois triângulos que se formam ao redor do paralelogramo da diagonal de Z.

3

a) A área do losango é 6.

Para calculá-la, pode-se somar as áreas dos triângulos que o compõem usando suas diagonais: a área do losango ABCD é igual à área do triângulo ABC somada com a área do triângulo ADC; ou à área do triângulo ABD somada com a área do triângulo BDC.

No primeiro caso, multiplica-se a base AC pela altura $\frac{BD}{2}$:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABC} = 2 \cdot \left(6 \cdot \frac{1}{2}\right) = 6$$

No segundo caso, multiplica-se a base BD pela altura $\frac{AC}{2}$:

$$A_{ABCD} = 2 \cdot A_{ABD} = 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{3}{2}\right) = 6$$

b) Utiliza-se o mesmo raciocínio do item anterior, observando-se que a base do triângulo PQR coincide com a diagonal maior ($D = 8,5$) e que a altura é a metade da diagonal menor ($d = 6$).

No triângulo PQS, a base é a diagonal menor e a altura é a metade da diagonal maior. Em ambos os casos tem-se:

$$A_{PQRS} = \frac{6 \cdot 8,5}{2} = 25,5$$

c) Nessa figura as medidas das diagonais estão representadas apenas pelas letras. Portanto:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

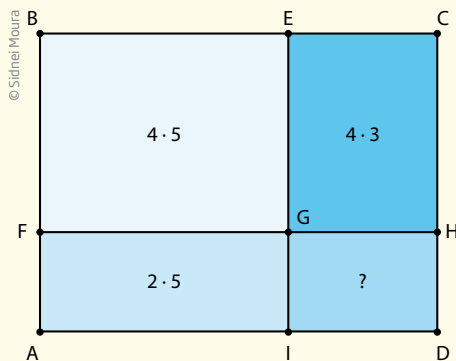
Essa é a fórmula da área do losango.

4 A figura da direita mostra o triângulo ABC decomposto em 9 triângulos congruentes ao triângulo BDE. Então a área de BDE é $\frac{90}{9} = 10 \text{ cm}^2$.

Como o trapézio EDFG é formado por 3 triângulos congruentes a BDE, então:

$$A_{EDFG} = 3 \cdot 10 \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$$

5 Como 20, 10 e 12 são as áreas de retângulos e eles correspondem à multiplicação das medidas dos lados, então as decomposições correspondentes são: $20 = 4 \cdot 5$; $10 = 2 \cdot 5$; e $12 = 4 \cdot 3$.



$AF = 2$; $FB = 4$; $BE = 5$; e $EC = 3$. O retângulo HGID tem medidas $GI = 2$ e $HG = 3$. Sua área, portanto, é dada por $2 \cdot 3 = 6$.

Há muito tempo, os círculos despertam a curiosidade humana. Os círculos sempre estiveram ao nosso redor, por exemplo: a Lua, o Sol, o formato redondo dos frutos, as ondas produzidas por uma pedra atirada na água, entre outros.

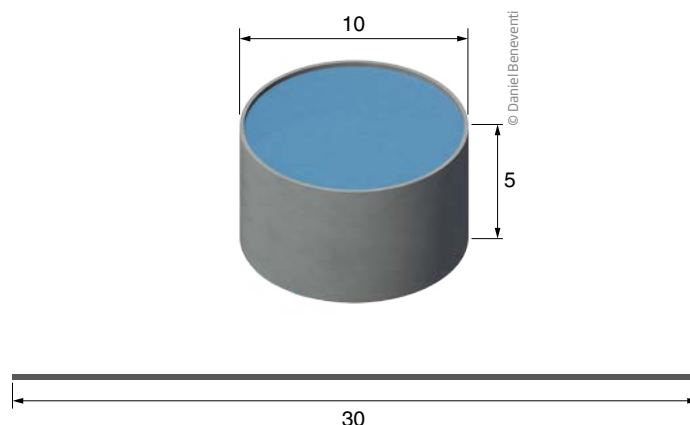
Ao observar troncos de árvore rolarem, o homem passou a “imitar” o movimento da natureza e inventou a roda há aproximadamente 6 mil anos. Daí em diante, surgiram muitas situações que levaram à necessidade de medir o comprimento da circunferência e a área do círculo. Esse será o assunto deste tema.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Pode-se observar circunferências e círculos em objetos do dia a dia, como embalagens de alimentos, rodas de veículos etc. Então, determinar o comprimento de circunferências e a área de círculos deve ser útil em muitas situações. Você consegue se lembrar de algumas delas?

Medidas na circunferência e no círculo

O interesse pelo estudo das medidas de uma circunferência é muito antigo. Há referências a essas medidas até no Antigo Testamento, em uma passagem que descreve um tipo de reservatório cilíndrico que teria 5 medidas de altura, 10 medidas de uma borda a outra e 30 medidas no contorno.



De acordo com essa referência, o comprimento da circunferência C é três vezes a medida do diâmetro d .

Nesse caso, a razão entre o comprimento C e o diâmetro d da circunferência é 3.

$$C = 3d \Rightarrow \frac{C}{d} = 3$$

Em busca de maior precisão, os matemáticos desenvolveram métodos para descobrir o valor dessa razão, que foi batizada de “pi” (π). Eles calcularam a razão entre o comprimento e o diâmetro de circunferências de vários tamanhos, e concluíram que esse é um valor constante de aproximadamente 3,14159.

Em 1737, o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) adotou a letra grega π como símbolo dessa constante: $\pi \approx 3,14$.

Mais tarde, descobriu-se que π é um número irracional; isso quer dizer que não existe uma fração que o represente, só aproximações racionais. Dependendo da aplicação, a aproximação $\pi = 3,14$ é mais do que suficiente para a maioria das atividades escolares e até mesmo profissionais.

Admitindo que a razão $\frac{C}{d}$ é constante, tem-se $\pi = \frac{C}{d}$.

Como $d = 2r$, então $\pi = \frac{C}{2r} \Rightarrow C = 2\pi r$

Portanto, quando a medida do raio é conhecida, $C = 2\pi r$ é a fórmula que determina o valor do comprimento de uma circunferência.

Acompanhe um exemplo da aplicação dessa fórmula.

- Quantas pedaladas são necessárias para uma pessoa percorrer 1 km numa bicicleta cuja roda tem um raio que mede 0,5 m?

Primeiro, calculam-se quantos metros ela se desloca a cada volta.

$$C = 2\pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 0,5 = 3,14 \text{ m}$$

Portanto, a cada volta, ela se desloca aproximadamente 3,14 m.

Para alcançar 1 km, uma pessoa terá que dar:

$$(3,14 \text{ m}) \cdot \text{número de voltas} = 1.000 \text{ m}$$

$$\text{número de voltas} = \frac{1.000 \text{ m}}{3,14 \text{ m}} \approx 318,47$$

Logo, são necessárias 319 voltas completas para percorrer 1 km. Considerando que, a cada pedalada, a roda dá uma volta completa em torno do seu centro, uma pessoa dá 319 pedaladas para percorrer essa distância.



VOCÊ SABIA?

- Em seu livro *As Maravilhas da Matemática*, o matemático Malba Tahan mostra uma forma de memorizar uma aproximação de π com 10 casas decimais, pela quantidade de letras de cada palavra da frase:

Sim, é útil e fácil memorizar um número grato aos sábios.
 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 6

- Leonhard Euler escolheu a letra grega π por ser a inicial da palavra “periferia” (contorno), escrita com o alfabeto grego.
- Arquimedes (287-212 a.C.), o grande inventor e matemático grego, usou a fração $\frac{22}{7}$ como aproximação de π .

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3 + 0,142857... = 3,142857...$$

Para chegar a esse grau de precisão, Arquimedes construiu um polígono regular com 96 lados. Esse polígono se assemelhava a um círculo. Então, ele calculou a razão do perímetro desse polígono pelo diâmetro.

- Quanto maior o número de lados de um polígono, mais o seu perímetro se aproxima do comprimento de uma circunferência.

ATIVIDADE

1 Comprimento da circunferência

Adote o valor $\pi = 3,14$ para resolver as atividades a seguir.

1 Calcule o comprimento aproximado de uma circunferência que tem:

a) diâmetro (d) = 15 m

b) raio (r) = 7,5 m

c) $d = 10$ mm

d) $r = 20$ mm

e) $d = 6 \text{ cm}$

f) $r = 8 \text{ cm}$

2 Observe o exemplo. Dado o comprimento da circunferência $C = 81,64 \text{ km}$, calcule o raio e o diâmetro dessa circunferência.

$$C = 81,64 \text{ km}$$

$$C = 2\pi r$$

$$81,64 = 2\pi r \Rightarrow 81,64 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \Rightarrow 81,64 = 6,28r \Rightarrow r = \frac{81,64}{6,28} \Rightarrow r = 13 \text{ km. Como } d = 2r, d = 26 \text{ km.}$$

Também é possível calcular o diâmetro primeiro e, depois, o raio:

$$C = 2\pi r \Rightarrow C = \pi \cdot 2r \Rightarrow C = \pi \cdot d$$

$$81,64 = \pi \cdot 2r \Rightarrow 81,64 = 3,14 \cdot d \Rightarrow 81,64 = 3,14d \Rightarrow d = \frac{81,64}{3,14} \Rightarrow d = 26 \text{ km}$$

Como o raio equivale à metade do diâmetro, $r = 13 \text{ km}$.

De acordo com o que você observou, resolva os itens abaixo:

a) $C = 25,12 \text{ m}$

b) $C = 9,42 \text{ cm}$

c) $C = 15,7 \text{ m}$

d) $C = 6,28 \text{ m}$

e) $C = 12,56 \text{ cm}$

3 O diâmetro da roda de uma bicicleta mede 80 cm. Determine quanto um ciclista percorre quando a roda dessa bicicleta dá 10 voltas completas.

4 O raio médio da Terra é de aproximadamente 6.400 km. Com base nesse dado, calcule o comprimento aproximado da Linha do Equador, usando as seguintes aproximações para π :

a) $\pi = 3,14$

b) $\pi = 3,1416$

c) Compare os dois resultados. Explique o que causou a diferença entre eles.

5 O diâmetro do aro de uma cesta de basquete mede 0,45 m. Calcule o comprimento do aro.

6 Uma bola de basquete deve ter até 78 cm de circunferência máxima.

a) Calcule seu diâmetro.

b) Uma bola com essas medidas entra na cesta com as dimensões indicadas no exercício anterior? Esboce um desenho com sua descoberta, indicando quantos são os centímetros de folga ou de excesso.

7 De acordo com as normas oficiais, uma bola de futebol de campo deve ter entre 68 cm e 71 cm de circunferência. Calcule o diâmetro da bola:

a) de 68 cm

b) de 71 cm

8 O círculo central de um campo de futebol deve medir 18,30 m de diâmetro. Calcule o comprimento do contorno do círculo.

9 Determine a medida do raio de uma roda cuja medida de comprimento é:

a) 100 cm

b) 1 m

10 Qual é o raio R de uma circunferência cujo comprimento é igual ao de uma semicircunferência de raio $r = 5$ cm?

11 Um marceneiro deve construir uma mesa redonda que comporte 6 pessoas a sua volta. Qual deve ser o raio dessa mesa para que cada pessoa possa dispor de um arco de 50 cm?

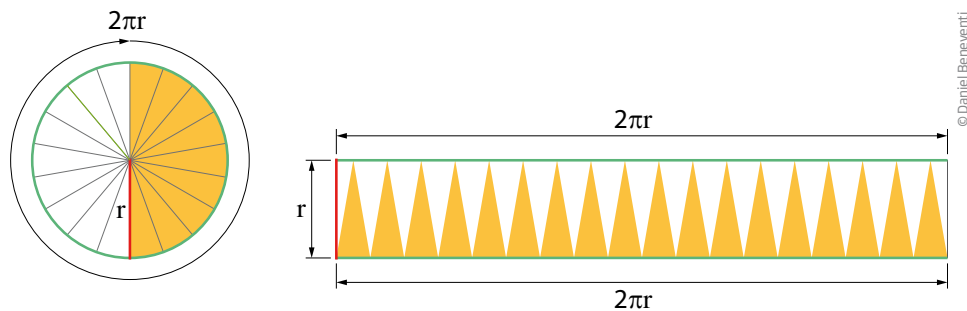
12 Determine o comprimento de uma circunferência inscrita em um quadrado de lado 2 cm.

13 Determine o comprimento de uma circunferência tangente a dois lados paralelos de um retângulo de lados 4 cm e 3 cm.



Área do círculo

Imagine um círculo que foi dividido em pequenas fatias e depois foi aberto, formando uma espécie de serrote:



A soma das áreas desses triângulos é muito próxima da área do círculo.

Observe que a área do “serrote” formado pelos triângulos é, aproximadamente, igual à metade da área do retângulo cuja base mede $2\pi r$, pois o comprimento desse retângulo coincide com o da circunferência ($2\pi r$) e a altura dele coincide com o raio r . Como você já sabe calcular o comprimento da circunferência, calcular a área será mais simples.

Comprimento da circunferência = base do retângulo $\rightarrow C = 2\pi r$

$$A = \frac{1}{2} \cdot C \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$$

$$A = \pi r^2$$

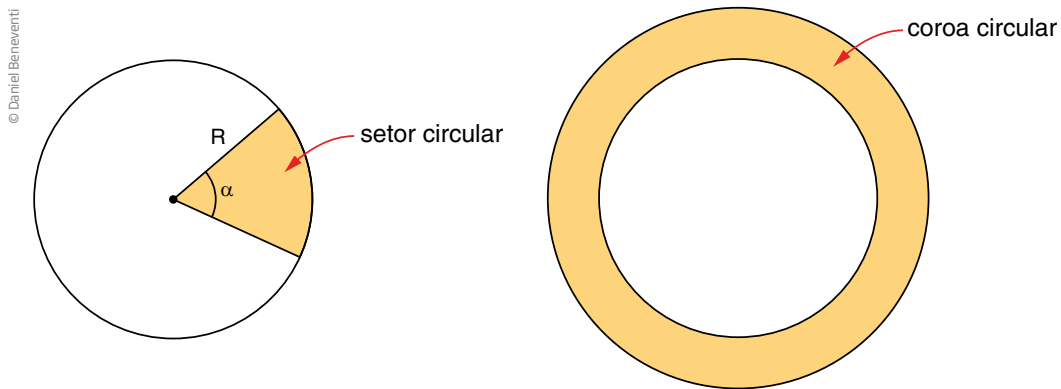
Essa é a fórmula que permite calcular a área de um círculo.

Para calcular, por exemplo, a área de um círculo de raio 5 cm, basta substituir o valor do raio na fórmula:

$$A = 3,14 \cdot 5^2 = 3,14 \cdot 25 = 78,5$$

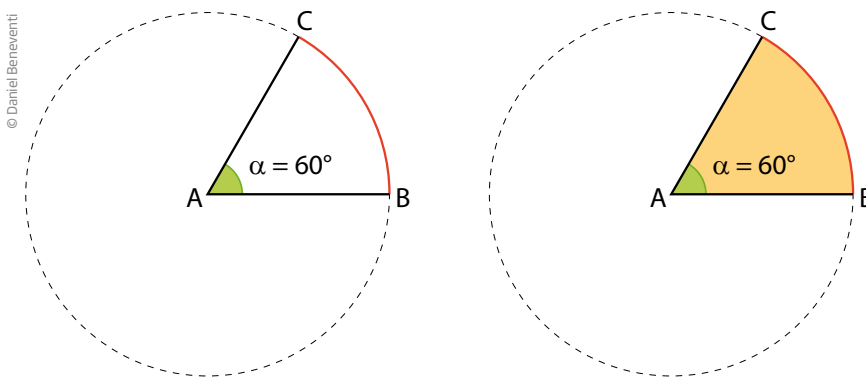
$$A = 78,5 \text{ cm}^2$$

Assim como existe uma fórmula para calcular a área do círculo, também existem fórmulas para determinar a área de partes do círculo, em especial, a do setor circular e a da coroa circular.



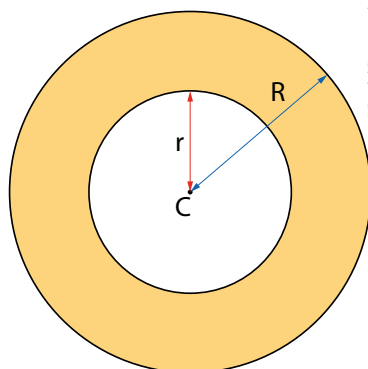
O setor circular é como uma fatia de pizza e é determinado pela medida do raio e pelo ângulo central α .

O setor circular é uma fração do círculo proporcional à razão $\frac{\alpha}{360}$, por exemplo, se $\alpha = 60^\circ$, essa razão é $\frac{1}{6}$ e a área do setor é $\frac{\pi R^2}{6}$.



A coroa circular é determinada pelo raio da circunferência externa e pelo raio da circunferência interna. Assim, a área da coroa circular é:

$$A_{\text{coroa}} = A_{\text{círculo de raio } R} - A_{\text{círculo de raio } r}$$



ATIVIDADE 2 Área do círculo

Adote o valor $\pi = 3,14$ para fazer os exercícios a seguir.

1 Calcule a área dos círculos de raios:

a) $r = 10$ cm

b) $r = 3,14$ m

c) $r = 8$ mm

d) $r = 15$ cm

2 Determine o valor dos raios dos círculos cujas áreas são conhecidas.

Observe o exemplo:

$$A = 78,5 \text{ cm}^2$$

$$A = \pi r^2 \rightarrow 78,5 = 3,14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{78,5}{3,14} \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm \sqrt{25} \Rightarrow r = \pm 5 \text{ cm}$$

Por se tratar de medida, o raio só pode assumir valor positivo. Então, $r = 5$ cm.

a) $A = 452,16 \text{ m}^2$

b) $A = 113,04 \text{ mm}^2$

c) $A = 100 \text{ m}^2$

3 Determine o valor dos diâmetros dos círculos cujas áreas são:

a) $A = 78,5 \text{ cm}^2$

b) $A = 452,16 \text{ m}^2$

c) $A = 113,04 \text{ mm}^2$

d) $A = 10 \text{ m}^2$

4 O comprimento de uma circunferência é 31,4 cm. Determine a área do círculo.

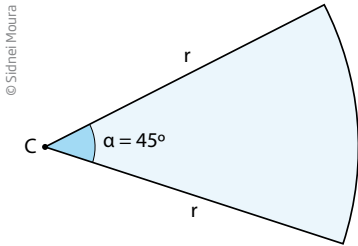
5 Dobrando a medida do raio de um círculo, quanto aumentará a área?

6 Determine a área de um círculo tangente aos quatro lados de um quadrado de lado 10 cm.

7 Determine a área de um círculo no qual está inscrito um quadrado de lado 2 cm.

8 Calcule a área do semicírculo de raio 10 cm.

9 Observe a figura de um setor circular de raio r e ângulo central de 45° , que representa $\frac{1}{8}$ de uma circunferência de raio r . Determine a área do setor sabendo que $r = 10$ cm.



10 Determine a área do setor circular de raio 60 cm cujo ângulo central mede:

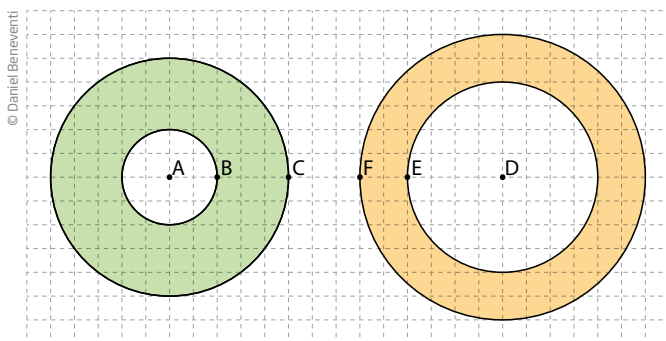
a) 45°

b) 60°

c) 72°

d) 120°

11 Na figura a seguir, há duas coroas circulares: a da esquerda tem centro em A e a da direita tem centro em D.



DICA!

Raio AB = 2, raio AC = 5, raio DE = 4 e raio DF = 6.

Sobre a área das duas coroas, assinale a alternativa correta:

- a) A coroa de centro em A tem área maior que a coroa de centro em D.
- b) As duas coroas têm áreas equivalentes.
- c) A coroa de centro em D tem área maior que a coroa de centro em A.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Comprimento da circunferência

1

a) $C = 2\pi r \rightarrow C = 3,14 \cdot 2r \rightarrow C = 3,14 \cdot 15 = 47,1 \text{ m}$

b) Se o raio é 7,5 m, o diâmetro mede 15 cm. Então, o comprimento aproximado da circunferência é 47,1 m (como no item a).

c) $C = 2\pi r = \pi \cdot d = 3,14 \cdot 10 = 31,4 \text{ mm}$

d) $C = 125,6 \text{ mm}$

e) $C = 18,84 \text{ cm}$

f) $C = 50,24 \text{ cm}$

2

a) $d = 8 \text{ m}; r = 4 \text{ m}$

b) $d = 3 \text{ cm}; r = 1,5 \text{ cm}$

c) $d = 5 \text{ m}; r = 2,5 \text{ m}$

d) $d = 2 \text{ m}; r = 1 \text{ m}$

e) $d = 4 \text{ cm}; r = 2 \text{ cm}$

3

$C = 2\pi r \rightarrow 3,14 \cdot 80 = 251,2 \text{ cm}$

$251,2 \text{ cm} \cdot 10 = 2.512 \text{ cm}$

O ciclista percorre 2.512 cm, ou seja, aproximadamente 25 m.

4

a) $2 \cdot 6.400 \cdot 3,14 = 40.192 \text{ km}$

b) $2 \cdot 6.400 \cdot 3,1416 = 40.212,48 \text{ km}$

c) Para a maioria das atividades do cotidiano, a aproximação 3,14 é suficiente, mas, quando se trabalha com medidas muito grandes, como o comprimento da Linha do Equador, as casas decimais a partir dos milésimos podem fazer diferença. No caso deste exercício, duas casas decimais resultaram em uma diferença de mais de 20 km.

5 $d = 0,45 \text{ m}$

$$C = 2\pi r \rightarrow C = \pi \cdot d \rightarrow C = 3,14 \cdot 0,45 \Rightarrow C = 1,413 \text{ m}$$

6

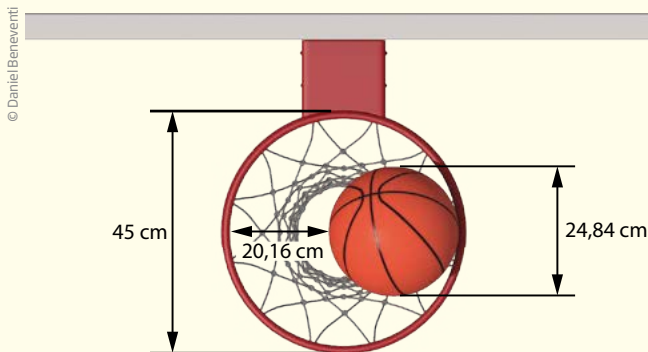
a) $C = 78 \text{ cm}$

$$C = 2\pi r \rightarrow 78 = \pi \cdot d \Rightarrow 78 = 3,14 \cdot d \Rightarrow d = \frac{78}{3,14} \Rightarrow d = 24,84 \text{ cm}$$

b) $0,45 \text{ m} = 45 \text{ cm}$ (diâmetro do aro)

$$45 - 24,84 = 20,16 \text{ cm}$$

Sim, a bola entra com folga de 20,16 cm.



7

a) $C = 68 \text{ cm}$

$$C = 2\pi r \rightarrow 68 = \pi \cdot d \Rightarrow 68 = 3,14 \cdot d \Rightarrow d = \frac{68}{3,14} \Rightarrow d = 21,65 \text{ cm}$$

b) $C = 71 \text{ cm}$

$$C = 2\pi r \rightarrow 71 = \pi \cdot d \Rightarrow 71 = 3,14 \cdot d \Rightarrow d = \frac{71}{3,14} \Rightarrow d = 22,61 \text{ cm}$$

8 $d = 18,30 \text{ m}$

$$C = 2\pi r \rightarrow C = \pi \cdot d \Rightarrow C = 3,14 \cdot 18,30 \Rightarrow C = 57,462 \text{ m}$$

9

a) $C = 100 \text{ cm}$

$$C = 2\pi r \rightarrow 100 = 2\pi r \Rightarrow 50 = 3,14 \cdot r \Rightarrow r = \frac{50}{3,14} \Rightarrow r = 15,92 \text{ cm}$$

b) $C = 1 \text{ m}$

$$C = 2\pi r \rightarrow 1 = 2\pi r \Rightarrow 1 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \Rightarrow r = \frac{1}{6,28} \Rightarrow r = 0,1592 \text{ m}$$

Outra maneira de resolver esse item é lembrar que $100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$. Portanto, para chegar à resposta do item b, basta converter a resposta do item a de centímetros para metros: $15,92 \text{ cm} = 0,1592 \text{ m}$.

10 $r = 5$ cm, $R = ?$

$$C = 2\pi r \rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \Rightarrow C = 31,4 \text{ cm}$$

Então, a semicircunferência tem 15,7 cm. Assim:

$$C = 2\pi R \rightarrow 15,7 = 2 \cdot 3,14 \cdot R \Rightarrow 15,7 = 6,28 \cdot R \Rightarrow R = \frac{15,7}{6,28} \Rightarrow R = 2,5 \text{ cm}$$

O raio dessa circunferência mede $R = 2,5$ cm.

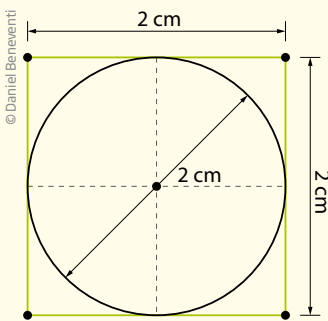
11 Para que a mesa redonda comporte 6 pessoas, dispo de 50 cm de arco para cada uma delas.

$$C = 6 \cdot 50 = 300 \text{ cm. Então:}$$

$$C = 2\pi r \rightarrow 300 = 2 \cdot 3,14 \cdot r \Rightarrow 300 = 6,28 \cdot r \Rightarrow r = \frac{300}{6,28} \Rightarrow r = 47,77 \text{ cm}$$

O raio da mesa deve ser de 47,77 cm.

12 Se a circunferência está inscrita em um quadrado de lado 2 cm, então o diâmetro dessa circunferência mede 2 cm.



$$C = 2\pi r = \pi \cdot d = 3,14 \cdot 2 = 6,28 \text{ cm}$$

O comprimento da circunferência é 6,28 cm.

13 Se a circunferência é tangente a dois lados de um retângulo 3×4 , então a medida do diâmetro é a do lado menor do retângulo. Usando o mesmo raciocínio do exercício anterior, $C = 3,14 \cdot 3 = 9,42$ cm.

Atividade 2 - Área do círculo

1

a) $r = 10$ cm

$$A = \pi r^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 10^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 100 \Rightarrow A = 314 \text{ cm}^2$$

b) $r = 3,14$ m

$$A = \pi r^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 3,14^2 \Rightarrow A \approx 30,96 \text{ m}^2$$

c) $r = 8$ mm

$$A = \pi r^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 8^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 64 \Rightarrow A = 200,96 \text{ mm}^2$$

d) $r = 15$ cm

$$A = \pi r^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 15^2 \Rightarrow A = 3,14 \cdot 225 \Rightarrow A = 706,5 \text{ cm}^2$$

2

a) $A = 452,16 \text{ m}^2$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 452,16 = 3,14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{452,16}{3,14} \Rightarrow r^2 = 144 \Rightarrow r = \pm \sqrt{144} \Rightarrow r = 12 \text{ m}$$

b) $A = 113,04 \text{ mm}^2$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 113,04 = 3,14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{113,04}{3,14} \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow r = \pm \sqrt{36} \Rightarrow r = 6 \text{ mm}$$

c) $A = 100 \text{ m}^2$

$$A = \pi r^2 \Rightarrow 100 = 3,14 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{100}{3,14} \Rightarrow r^2 = 31,84 \Rightarrow r = \pm \sqrt{31,84} \Rightarrow r \approx 5,64 \text{ m}$$

3a) Como a área é a mesma do exemplo do exercício 2, em que $r = 5$, então: $d = 2r = 2 \cdot 5 = 10 \text{ cm}$.

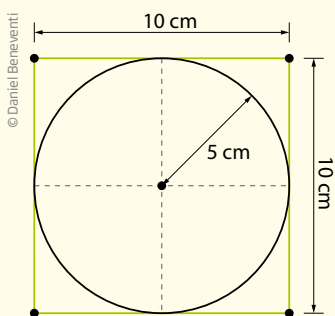
b) $d = 24 \text{ m}$

c) $d = 12 \text{ mm}$

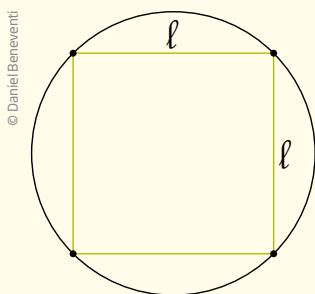
d) $d = 3,56 \text{ m}$

4 Se $C = 31,4 \text{ cm} \Rightarrow 31,4 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{31,4}{2\pi} = \frac{31,4}{6,28} = 5 \text{ cm}$

$$A = \pi r^2 \rightarrow 3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ cm}^2$$

5 A área quadruplicará, pois $A = \pi r^2 \rightarrow A = \pi(2r)^2 = 4(\pi r^2)$.**6** Se o círculo está inscrito no quadrado, então $\ell = d = 10 \text{ cm}$. Logo, $r = 5 \text{ cm}$.

$$A = \pi r^2 \rightarrow 3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ cm}^2$$

A área do círculo é $78,5 \text{ cm}^2$.**7** Se o quadrado inscrito no círculo tem lado de 2 cm , então $d = 2\sqrt{2} \text{ cm}$. Logo, $r = \sqrt{2} \text{ cm}$.

$$A = \pi r^2 \rightarrow 3,14 \cdot (\sqrt{2})^2 = 3,14 \cdot 2 = 6,28 \text{ cm}^2$$

A área do círculo é $6,28 \text{ cm}^2$.

Tão importante quanto saber calcular o volume de um cubo ou de um bloco retangular é calcular o volume de sólidos que têm forma cilíndrica. Eles estão em toda a parte.

Com base no volume, é possível avaliar a capacidade de recipientes cilíndricos, como latas de conserva, por exemplo, e confrontá-la com a massa indicada nos rótulos.



© ccekmal13/123RF

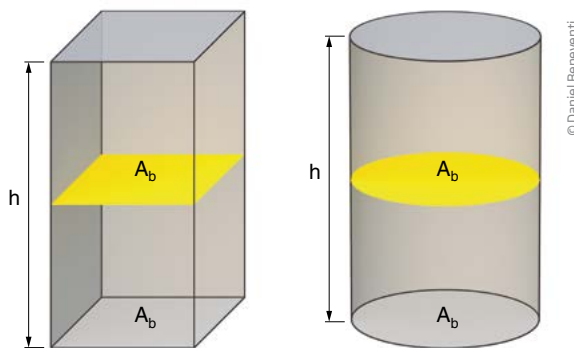
? O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já reparou que em todas as embalagens dos produtos que compra no supermercado vem registrado o peso líquido do produto?

Um bom exercício é verificar se o peso líquido indicado nas embalagens é compatível com as dimensões dos recipientes.

📖 Volume de um sólido

Para calcular o volume de um sólido em que as seções planas têm, todas, a mesma área, multiplica-se a área da base pela altura.



© Daniel Beneventi

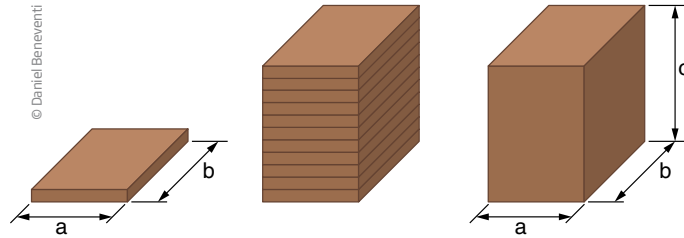
$$V = A_b \cdot h$$

Para melhor compreender essa ideia, imagine, por exemplo, um pacote de bolachas de água e sal em que todas são quadradas e têm a mesma massa. Se as bolachas forem empilhadas umas sobre as outras para compor um pacote, a massa total será a quantidade de massa de uma bolacha multiplicada pelo número de bolachas que há na pilha.



© Vladislav Nantsov/123RF

Pode-se usar essa ideia para determinar o volume de um prisma de base retangular.



Se a área A do retângulo da base é $A = a \cdot b$, então o volume V do prisma é a área da base multiplicada pela altura c :

$$V = A \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

Observe esse princípio utilizado no cálculo do volume de um cilindro de base circular:

$$V = \text{área da base (A)} \cdot \text{altura (h)}$$

$$V = A \cdot h$$

Mas a área da base desse cilindro é $A = \pi r^2$, portanto, o volume do cilindro é $V = \pi r^2 \cdot h$.

Essa relação é utilizada em inúmeras aplicações, por exemplo, para determinar a capacidade de um reservatório cilíndrico de 10 m de diâmetro por 6 m de altura.



$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 6 = 3,14 \cdot 25 \cdot 6 = 3,14 \cdot 150 = 471 \text{ m}^3$$

O metro cúbico (m^3) é a unidade de medida padrão adotada para volume.
 $1 \text{ m}^3 = 1.000 \text{ L}$

Algumas caixas-d'água têm formato cilíndrico. Imagine que um fabricante precisa determinar que altura deve ter uma caixa-d'água com raio de 1 m, para que sua capacidade seja de 2.000 L.

Como $1.000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$, tem-se:

$$V = 2.000 \text{ L} = 2 \text{ m}^3$$

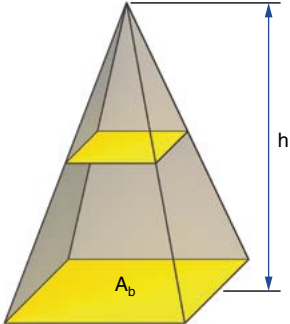
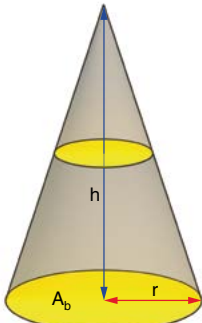
$$V = \pi r^2 \cdot h = 2$$

$$3,14 \cdot 1^2 \cdot h = 2 \Rightarrow h = \frac{2}{3,14} = 0,637 \Rightarrow h = 0,637 \text{ m}$$

Portanto, a altura dessa caixa d'água deverá ser de 0,637 m, quase 64 cm.

Volume da pirâmide e do cone

Sabendo como calcular o volume de um prisma ou de um cilindro, pode-se calcular também o volume de uma pirâmide ou de um cone. Isso porque os matemáticos demonstraram uma relação entre os volumes desses sólidos:

	<p>O volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume de um prisma de mesma base e mesma altura, ou seja:</p> $V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$
	<p>O volume de um cone é $\frac{1}{3}$ do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura, ou seja:</p> $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h$ $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h$

Saber calcular o volume de um cilindro ou de um cone é importante para determinar, por exemplo, a capacidade de um silo utilizado para armazenar cereais.



A fórmula do volume da esfera é:

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Há muitas situações práticas em que é importante calcular o volume de uma esfera. Veja exemplos nas imagens ao lado.



© Mauricio Simonetti/Pulsar Imagens

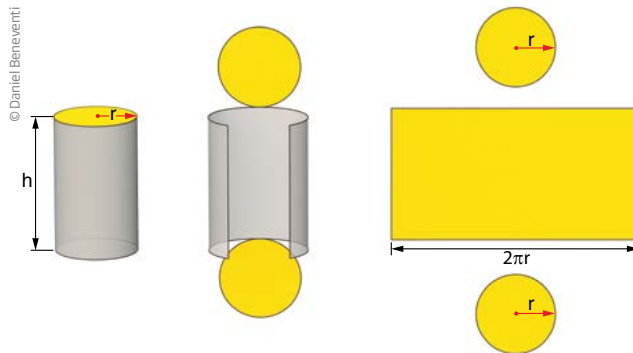


© Kiattisaak Chiphimai/123RF



© Digital Light Source/UGC/Getty Images

Determinar a área de superfície de sólidos também é muito útil. A indústria de embalagens, por exemplo, prevê a quantidade de matéria-prima (alumínio ou papelão) para fabricar latas e outros tipos de embalagens cilíndricas por meio do cálculo de superfície do cilindro. Para isso, é fundamental saber sua área lateral (que é um retângulo) e de suas bases.



Para calcular a área da **superfície de um cilindro** de base circular de raio r e altura h , somam-se as áreas do retângulo de lados $2\pi r$ e altura h e das duas bases circulares de raio r .

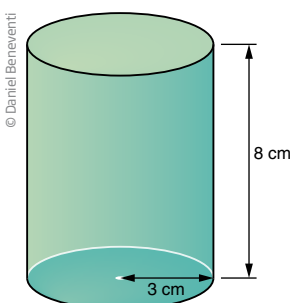
$$A_{\text{superfície}} = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h + \pi r^2 = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r + h)$$

ATIVIDADE 1 Volume de corpos redondos

1 Determine o volume de um cilindro cuja base é um círculo de raio 5 cm e cuja altura é 10 cm.

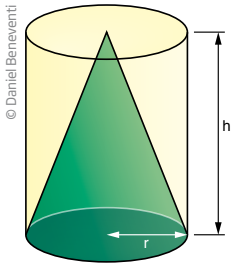
2 Determine qual é o cilindro com o maior volume: o cilindro 1, de raio 4 cm e altura 6 cm, ou o cilindro 2, de raio 6 cm e altura 4 cm?

3 Determine o volume do cilindro abaixo.



4 Determine o volume de um cone de raio 6 cm e altura 10 cm.

5 Considere a figura a seguir e determine:



a) o volume do cilindro cuja base é um círculo de raio 5 cm e cuja altura é 12 cm.

b) o volume do cone cuja base é um círculo de diâmetro 10 cm e cuja altura é 12 cm.

HORA DA CHEGAGEM

Atividade 1 - Volume de corpos redondos

1 $V = \pi r^2 \cdot h = \pi 5^2 \cdot 10 = 250\pi = 250 \cdot 3,14 = 785 \text{ cm}^3$

2 Cilindro 1: $r = 4$ e $h = 6 \rightarrow V = \pi 4^2 \cdot 6 = 96\pi$

Cilindro 2: $r = 6$ e $h = 4 \rightarrow V = \pi 6^2 \cdot 4 = 144\pi$

Logo, o cilindro 2 é o de maior volume.

3 $r = 3 \text{ cm}$ e $h = 8 \text{ cm} \rightarrow V = \pi 3^2 \cdot 8 = 72\pi = 226,08 \text{ cm}^3$

4 $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h = \frac{(\pi 6^2 \cdot 10)}{3} = \frac{360\pi}{3} = 120\pi = 376,8 \text{ cm}^3$

5 As áreas das bases do cilindro e do cone são a área do círculo de raio 5 cm, que é equivalente à área do círculo de diâmetro 10 cm.

$A = \pi r^2 \rightarrow A = 3,14 \cdot 25 = 78,5 \text{ cm}^2$

a) Volume do cilindro = $78,5 \cdot 12 = 942 \text{ cm}^3$

b) Volume do cone, que é a terça parte do volume do cilindro $\rightarrow V = \frac{942}{3} = 314 \text{ cm}^3$

TEMAS

1. Sistema cartesiano: o ponto
2. A equação da reta
3. A equação da circunferência

Introdução

O sistema utilizado para representar pontos por meio de **pares ordenados** é chamado **sistema cartesiano** ou **plano cartesiano**, em homenagem ao filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), que, em 1637, publicou um método de resolução de problemas de Geometria usando Álgebra e de problemas de Álgebra usando Geometria. A reunião dessas duas áreas da Matemática é denominada **Geometria Analítica**.



O filósofo e matemático René Descartes.

Sistema cartesiano: o ponto **TEMA 1**

Neste tema, você aprofundará seus conhecimentos sobre medição de distâncias, e verá como se determina a posição de um ponto por meio de coordenadas.

**O QUE VOCÊ JÁ SABE?**

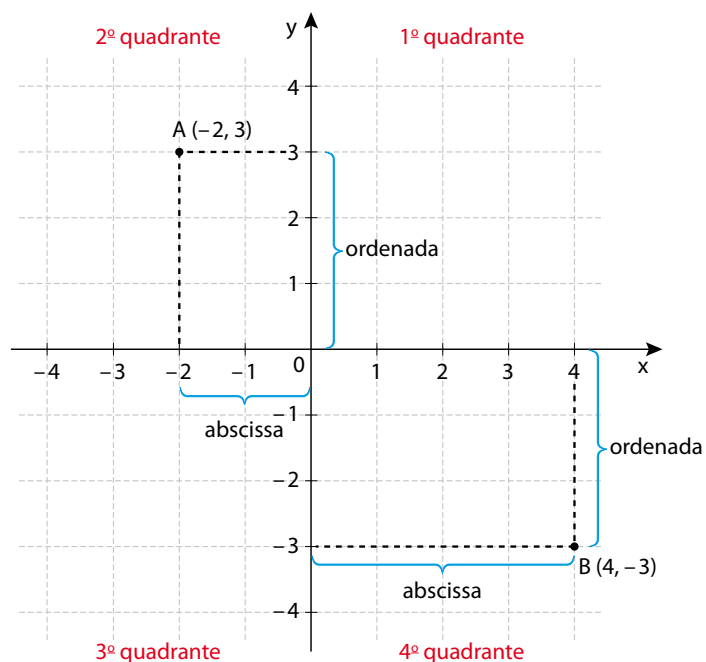
Você já estudou a localização de um ponto da Terra por meio de coordenadas geográficas que indicam a latitude e a longitude? E, para localizar ruas, você já utilizou um mapa com sistema de coordenadas de letras e números? Ao utilizar um celular ou GPS para encontrar determinado lugar, reparou que ele também usa um sistema de coordenadas?

**Plano cartesiano**

O **plano cartesiano** da Geometria Analítica, tratado nesta Unidade, é o mesmo usado para construir gráficos de funções, sendo constituído por dois eixos perpendiculares e orientados: o eixo das abscissas (horizontal) e o eixo das ordenadas (vertical). Esses dois eixos definem quatro regiões do plano chamadas de **quadrantes**.

Na Geometria Analítica, qualquer ponto do plano cartesiano é representado por um par ordenado (x, y) , que é a localização do ponto. O x indica a **abscissa**, marcada no eixo horizontal, e o y indica a **ordenada**, marcada no eixo vertical.

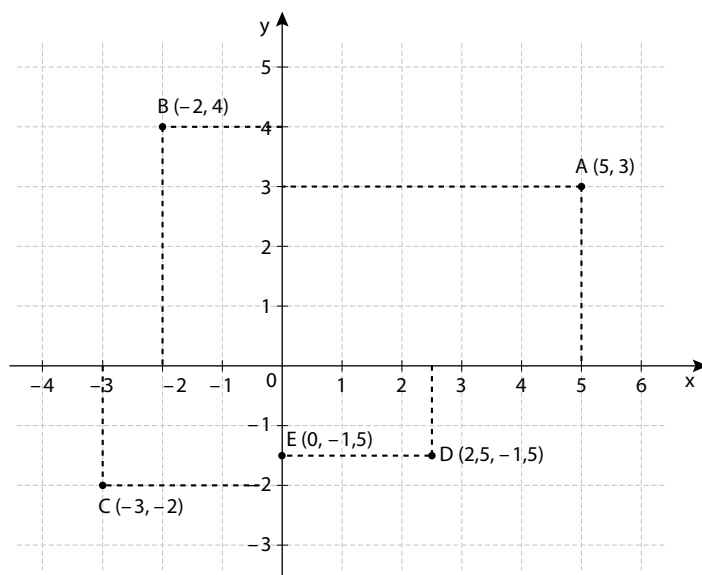
Analisando o sinal dos números do par ordenado, é possível saber em que região do plano o ponto se encontra: no 1º, 2º, 3º ou 4º quadrante.



© Sidnei Moura

Se a abscissa do ponto é positiva, o ponto está à direita do eixo vertical; se a ordenada do ponto é positiva, o ponto está na parte superior do plano cartesiano, acima do eixo horizontal.

Observe, na figura ao lado, que os sinais dos pontos determinam em qual quadrante ele se encontra: o ponto C, por exemplo, que tem todas as coordenadas negativas, está no 3º quadrante. Se você reparar em todos os pontos da figura, perceberá um padrão, conforme a tabela abaixo.



© Sidnei Moura

Sinal da abscissa (x)	Sinal da ordenada (y)	Quadrante
+	+	1º
-	+	2º
-	-	3º
+	-	4º

Com isso, mesmo que um ponto não possa ser visto ou representado no plano cartesiano, é possível saber com segurança em qual quadrante ele se localiza. Por exemplo, $(-37, 45)$ é um ponto do 2º quadrante: à esquerda do eixo das ordenadas e acima do eixo das abscissas.

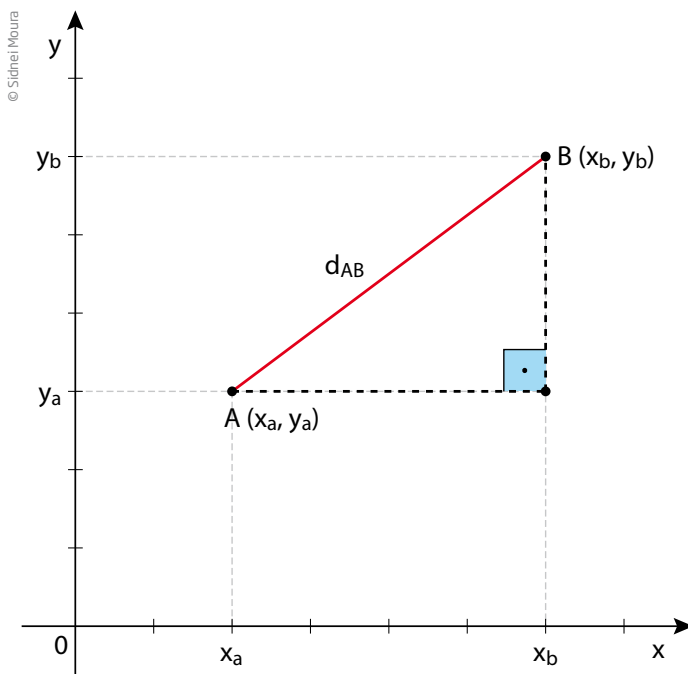
Com base nas coordenadas dos pontos no plano cartesiano, é possível determinar:

- a) a distância entre dois pontos;
- b) se três pontos estão alinhados, ou seja, se pertencem a uma mesma reta;
- c) as coordenadas do ponto médio de um segmento.

Distância entre dois pontos

Dados dois pontos distintos do plano cartesiano, é possível determinar a **distância** entre eles calculando a medida do segmento de reta que tem os dois pontos como extremidades. Para isso, basta aplicar o teorema de Pitágoras.

Sejam os pontos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$ no plano cartesiano. Na figura a seguir, esses pontos determinam as extremidades do segmento \overline{AB} e, como esse segmento está inclinado em relação aos eixos, ele coincide com a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos medem $(x_b - x_a)$ e $(y_b - y_a)$.



LEMBRE!

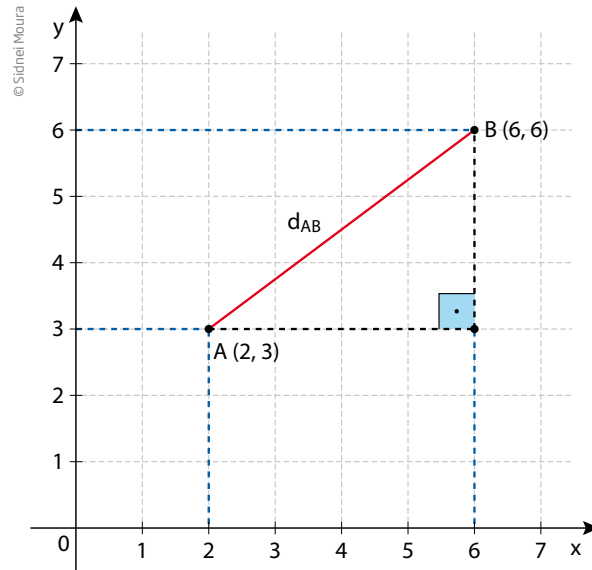
Teorema de Pitágoras

$$h^2 = a^2 + b^2$$

Hipotenusa ao quadrado é igual à soma do quadrado dos catetos.

$$d_{AB} = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Pode-se usar essa fórmula para determinar a distância dos pontos A(2, 3) e B(6, 6).



$$d_{AB} = \sqrt{(6 - 2)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

A distância entre os pontos A e B é, portanto, 5.

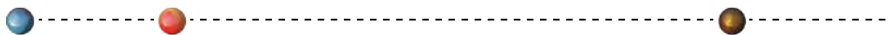
Agora, observe o cálculo da distância entre dois pontos, P(-2, -3) e Q(3, 9), aplicando-se essa fórmula, mas sem representá-los graficamente. Note que P é um ponto do 3º quadrante, e Q, um ponto do 1º quadrante.

$$d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

$$\sqrt{(3 - (-2))^2 + (9 - (-3))^2} = \sqrt{(3 + 2)^2 + (9 + 3)^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

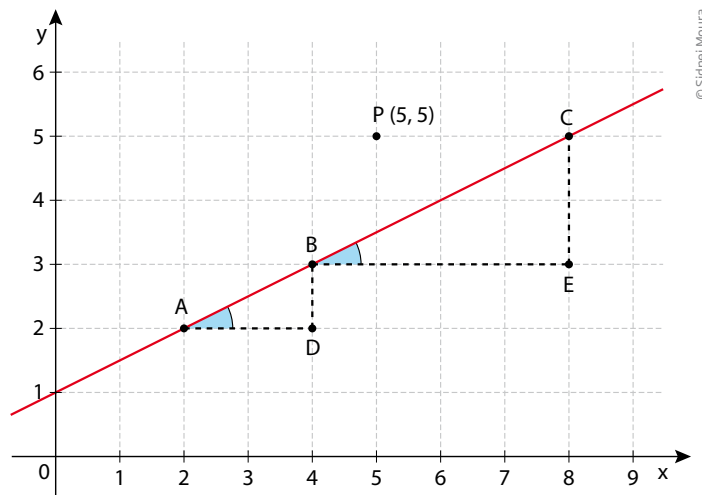
A distância entre os pontos P e Q é 13.

Alinhamento de três pontos



Outro problema que se pode resolver utilizando as coordenadas do plano cartesiano é determinar se três pontos estão alinhados.

Observe a figura a seguir. Para que os pontos $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$ e $C(x_c, y_c)$ estejam alinhados, os ângulos indicados (\widehat{BAD} e \widehat{CBE}) têm que ser iguais, garantindo a direção da reta tracejada.



Como se trata de triângulos retângulos, os triângulos ABD e BCE devem ser semelhantes, com lados proporcionais, ou seja, a razão entre as medidas dos lados correspondentes deve ser a mesma. Veja:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{x_D - x_A}{x_E - x_B} = \frac{y_B - y_D}{y_C - y_E} \quad (I)$$

Na figura apresentada, tem-se $A(2, 2)$, $B(4, 3)$ e $C(8, 5)$ e os pontos auxiliares: $D(4, 2)$ e $E(8, 3)$. Substituindo as coordenadas em (I), tem-se:

$$\frac{AD}{BE} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow \frac{4 - 2}{8 - 4} = \frac{3 - 2}{5 - 3} = \frac{1}{2}$$

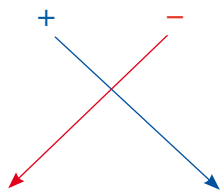
Se a razão entre as medidas dos lados correspondentes é a mesma, então ABD e BCE são triângulos semelhantes e, portanto, os ângulos indicados na figura são iguais.

Outro modo de verificar se três pontos estão alinhados é organizar as coordenadas dos pontos em uma **tabela** e usar um dispositivo prático de multiplicação em cruz.

As coordenadas dos três pontos devem ser organizadas de modo que as abscissas fiquem na primeira linha da tabela e as ordenadas na segunda linha. Na quarta coluna, devem ser repetidas as coordenadas da primeira coluna. Observe o exemplo:

$$\begin{array}{l} \text{Abscissas} \rightarrow \\ \text{Ordenadas} \rightarrow \end{array} \left| \begin{array}{cccc} x_a & x_b & x_c & x_a \\ y_a & y_b & y_c & y_a \end{array} \right| = 0$$

Deve-se fazer as multiplicações em cruz e subtrair os resultados de acordo com o esquema indicado:



$$(x_a \cdot y_b + x_b \cdot y_c + x_c \cdot y_a) - (x_b \cdot y_a + x_c \cdot y_b + x_a \cdot y_c) = 0$$

IMPORTANTE!

A condição necessária para que haja o alinhamento dos três pontos, por esse método, é que o resultado seja 0 (zero).

Veja a aplicação desse dispositivo para conferir se os pontos A(2, 2), B(4, 3) e C(8, 5) representados na figura do exemplo anterior estão alinhados:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 8 & 24 & 6 & 10 & 20 & 16 \end{vmatrix}$$

$$(6 + 20 + 16) - (8 + 24 + 10) = 42 - 42 = 0$$

Como o resultado é zero, então os pontos estão alinhados.

Agora, acompanhe a aplicação desse dispositivo para três pontos que, sabe-se de antemão, não estão alinhados: A(2, 2), B(4, 3) e P(5, 5).

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 2 \\ 8 & 15 & 6 & 10 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

$$(6 + 20 + 10) - (8 + 15 + 10) = 36 - 33 = 3 \neq 0$$

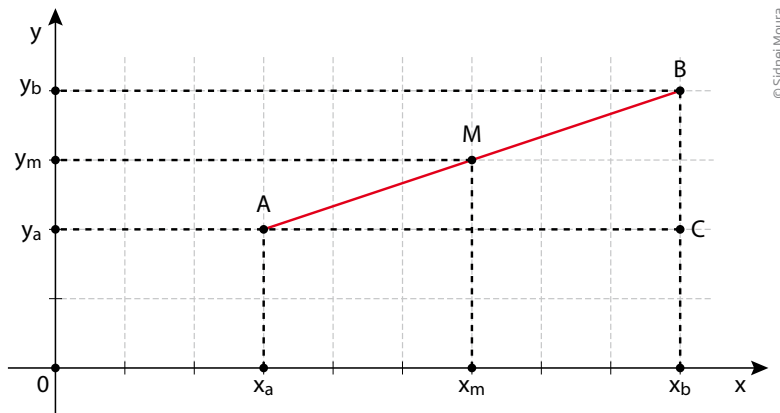
Veja que, nesse caso, o resultado é diferente de 0 (zero), portanto os pontos não estão alinhados.

Ponto médio de um segmento

Sejam dois pontos A(x_a , y_a) e B(x_b , y_b). É possível determinar as coordenadas do ponto médio M(x_m , y_m) calculando as médias aritméticas das abscissas e das ordenadas:

$$M\left(\frac{x_a + x_b}{2}, \frac{y_a + y_b}{2}\right).$$

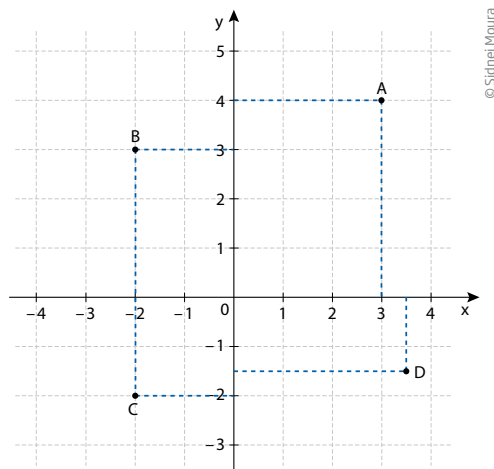
No exemplo da figura a seguir, veem-se as coordenadas dos pontos A e B: A(3, 2) e B(9, 4).



Veja como ficaria o cálculo: $M\left(\frac{3+9}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = M\left(\frac{12}{2}, \frac{6}{2}\right) = M(6, 3)$.

ATIVIDADE 1 Pontos

1 Dê as coordenadas dos pontos indicados no plano cartesiano.

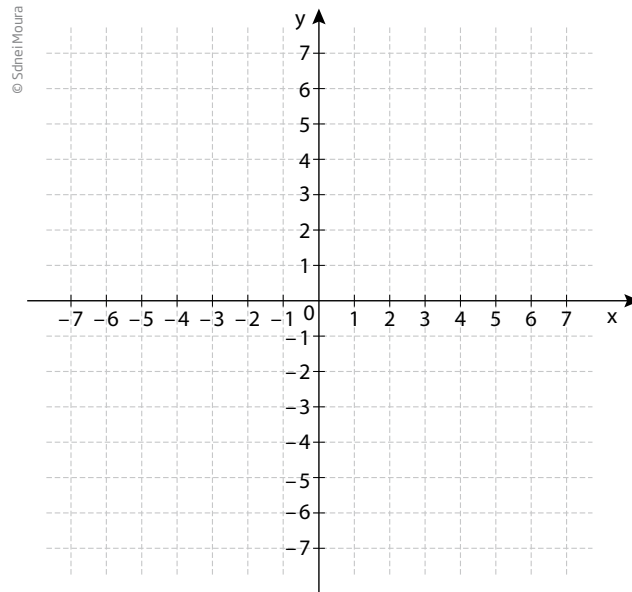


2 Sejam os pontos A(3, 4), B(-2, 3), C(2, 0), D(0, -3), E(-3/2, -5), F(-1, 1) e G(2, -2).

a) Indique quais são os pontos do 3º quadrante.

b) Indique quais são os pontos que estão sobre os eixos.

c) Represente no mesmo plano cartesiano os pontos indicados.



3 Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras (V) ou falsas (F).

- a) O ponto $A(3, 0)$ está sobre o eixo das ordenadas.
- b) O ponto $B(0, -2)$ está sobre o eixo das abscissas.
- c) O ponto $C(-5, 0)$ está sobre o eixo das abscissas.
- d) O ponto $D(0, 12)$ está sobre o eixo das ordenadas.

4 Determine as distâncias entre os seguintes pontos:

- a) $P(4, 3)$ e $Q(7, 3)$
- c) $P(-7, -5)$ e $Q(5, 0)$

- b) $P(4, 7)$ e $Q(4, 3)$

- d) $P(4, -1)$ e $Q(4, 1)$

5 Calcule a distância entre os pontos $(0, 0)$ e $(3, 4)$.

6 Sejam os pontos $A(-3, 1)$ e $B(4, 4)$. A distância entre eles é:

- a) 7 d) 49
b) $\sqrt{15}$ e) 16
c) $\sqrt{58}$

7 A distância entre $A(1, 3)$ e $B(5, 6)$ é:

- a) 5 d) 20
b) 10 e) 25
c) 15

8 O comprimento da circunferência de diâmetro CD , sendo $C(2, 1)$ e $D(10, 7)$, é:

- a) 5π d) 17π
b) 10π e) 29π
c) 20π

LEMBRE!

O comprimento de uma circunferência é $2\pi r$, e seu diâmetro é $2r$.

9 Entre os pontos de cada item a seguir, verifique quais estão alinhados:

- a) $(-1, -1)$, $(1, 1)$ e $(2, 5)$ c) $(-2, 3)$, $(-3, 2)$ e $(0, 0)$

- b) $(-2, -2)$, $(1, 1)$ e $(2, 2)$ d) $(6, -9)$, $(0, 0)$ e $(-2, 3)$

10 Determine o valor de m para que os pontos $(m, 2)$, $(3, 1)$ e $(0, -1)$ estejam alinhados.

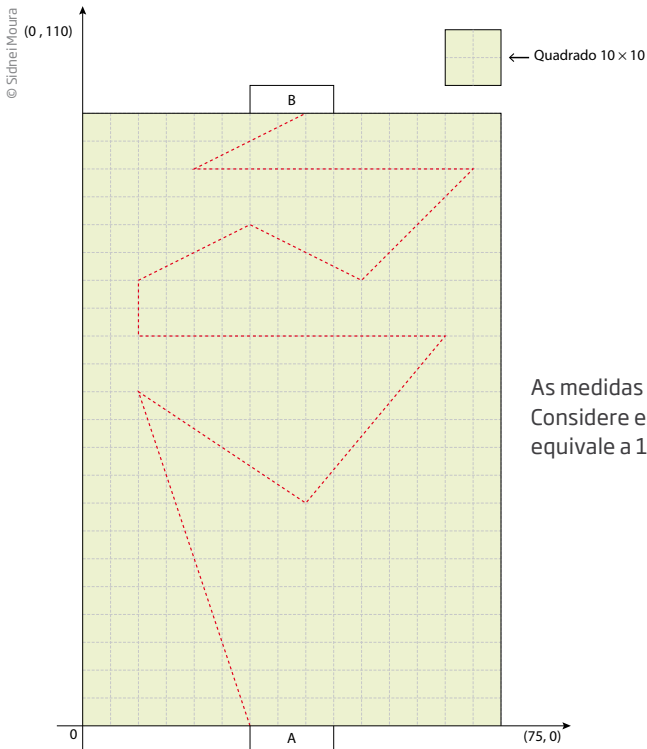
11 Em cada caso, determine as coordenadas do ponto médio:

a) $(2, 6)$ e $(12, 20)$

b) $(-3, 5)$ e $(3, -5)$

12 Sabendo que os pontos $A(1, 1)$ e $B(9, 7)$ são extremidades do diâmetro de uma circunferência, determine a coordenada do centro e a medida do raio dessa circunferência.

13 Em uma partida de futebol, a bola partiu do gol no ponto A , percorrendo um caminho que passou pelos pontos identificados pelas coordenadas $(3, 0)$, $(1, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 7)$, $(1, 7)$, $(1, 8)$, $(3, 9)$, $(5, 8)$, $(7, 10)$, $(2, 10)$, até o gol oposto, em $B(4, 11)$, conforme indicado na figura a seguir.



As medidas do campo de futebol oficial são $75 \text{ m} \times 110 \text{ m}$.
 Considere então que a distância do ponto $(0, 0)$ ao ponto $(1, 0)$ equivale a 10 m .

Suponha que a bola se desloque no espaço sempre em linha reta e responda:

a) Quantos metros a bola percorreu?

b) Sabendo que a bola levou 30 s para percorrer sua trajetória, qual é a velocidade média da bola do gol A até o gol B em m/s?

LEMBRE!

Para calcular a velocidade média, use a fórmula: $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Pontos

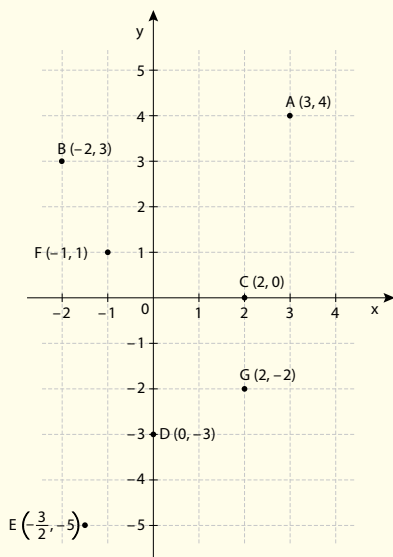
1 As coordenadas são: A(3, 4); B(-2, 3); C(-2, -2); D($\frac{7}{2}$, $-\frac{3}{2}$).

2

a) O ponto do 3º quadrante é E($-\frac{3}{2}$, -5).

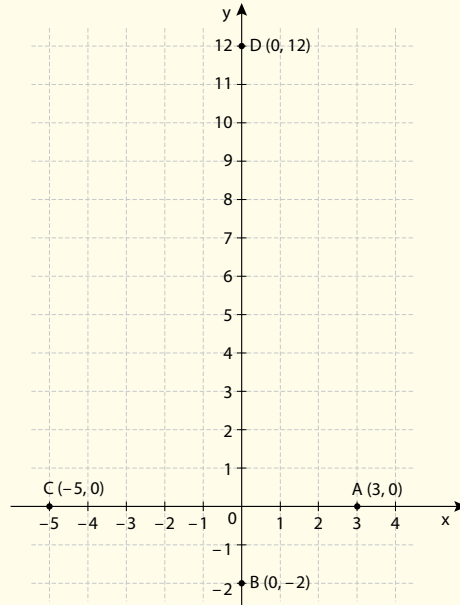
b) Os pontos que estão sobre os eixos são: C(2, 0) e D(0, -3).

c)



3

- a) **F** O ponto A(3, 0) está sobre o eixo das abscissas.
- b) **F** O ponto B(0, -2) está sobre o eixo das ordenadas.
- c) **V**
- d) **V**



© Sidinei Moura

É importante perceber que, se $x = 0$, o ponto está sobre o eixo das ordenadas; se $y = 0$, o ponto está sobre o eixo das abscissas.

4 Para resolver esse exercício, lembre que $d_{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$

- a) $d = \sqrt{(7 - 4)^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3$
- b) $d = \sqrt{(4 - 4)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$
- c) $d = \sqrt{(5 - (-7))^2 + (0 - (-5))^2} = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$
- d) $d = \sqrt{(4 - 4)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{0 + 4} = \sqrt{4} = 2$

Neste exercício, é importante notar que, se dois pontos têm abscissas iguais, o segmento que eles formam é paralelo ao eixo das ordenadas, e sua distância é o valor em módulo da diferença de suas ordenadas.

Da mesma forma, se dois pontos têm ordenadas iguais, o segmento que eles formam é paralelo ao eixo das abscissas e sua distância é o valor em módulo da diferença de suas abscissas.

5 $d = \sqrt{(3 - 0)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

6 Alternativa correta: c.

$d_{AB} = \sqrt{(4 - (-3))^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$

7 Alternativa correta: a.

$$d_{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

8 Alternativa correta: b. Para saber a medida do comprimento de uma circunferência, é necessário apenas determinar a medida de seu diâmetro. Assim, calcula-se a distância entre os pontos C e D:

$$d_{AB} = \sqrt{(10-2)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Portanto, o comprimento dessa circunferência é $C = \pi \cdot 10 = 10\pi$.

9

a)
$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(-1 + 5 - 2) - (-1 + 2 - 5) = 2 + 4 = 6 \neq 0$$

Não estão alinhados.

b)
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(-2 + 2 - 4) - (-2 + 2 - 4) = -4 + 4 = 0$$

Estão alinhados.

c)
$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$(-4 - 0 + 0) - (-9 + 0 - 0) = -4 + 9 = 5 \neq 0$$

Não estão alinhados.

d)
$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -2 & 6 \\ -9 & 0 & 3 & -9 \end{vmatrix}$$

$$(0 + 0 + 18) - (0 - 0 + 18) = 18 - 18 = 0$$

Estão alinhados.

10

$$\begin{vmatrix} m & 3 & 0 & m \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(m - 3 + 0) - (6 + 0 - m) = (m - 3) - (6 - m) = m - 3 - 6 + m = 2m - 9 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2} = 4,5$$

Para que os pontos fiquem alinhados, o valor de m deve ser 4,5.

11

$$\text{a) } x_m = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7; \quad y_m = \frac{6 + 20}{2} = \frac{26}{2} = 13 \quad \rightarrow \quad M(7, 13)$$

$$\text{b) } x_m = \frac{-3 + 3}{2} = \frac{0}{2} = 0; \quad y_m = \frac{5 + (-5)}{2} = \frac{0}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad M(0, 0)$$

12 Para encontrar as coordenadas do centro $C(x, y)$, é preciso lembrar que o centro é o ponto médio do diâmetro; portanto:

$$x_c = \frac{1 + 9}{2} = \frac{10}{2} = 5; \quad y_c = \frac{1 + 7}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Para calcular a medida do raio, basta calcular a distância do centro $C(5, 4)$ a qualquer ponto da extremidade do diâmetro, por exemplo $A(1, 1)$:

$$r = d_{AC} = \sqrt{(5 - 1)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

13

a) Uma calculadora pode ajudá-lo a calcular as raízes encontradas.

Primeiro, calculam-se as distâncias dos segmentos, saindo do ponto A e chegando ao ponto B. Para tanto, é preciso atribuir letras para cada ponto dado: A(3, 0), C(1, 6), D(4, 4), E(6, 7), F(1, 7), G(1, 8), H(3, 9), I(5, 8), J(7, 10), K(2, 10) e B(4, 11). Em seguida, calcular as distâncias:

d_{AC} , d_{CD} , d_{DE} , d_{EF} , d_{FG} , d_{GH} , d_{HI} , d_{IJ} , d_{JK} e d_{KB} .

Assim:

$$d_{AC} = \sqrt{(1 - 3)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} \approx 6,32$$

$$d_{CD} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \approx 3,60$$

$$d_{DE} = \sqrt{(6 - 4)^2 + (7 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,60$$

$$d_{EF} = \sqrt{(1 - 6)^2 + (7 - 7)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_{FG} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (8 - 7)^2} = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{0 + 1} = \sqrt{1} = 1$$

$$d_{GH} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (9 - 8)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$d_{HI} = \sqrt{(5 - 3)^2 + (8 - 9)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$d_{IJ} = \sqrt{(7 - 5)^2 + (10 - 8)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \approx 2,83$$

$$d_{JK} = \sqrt{(2 - 7)^2 + (10 - 10)^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = \sqrt{25 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$d_{KB} = \sqrt{(4 - 2)^2 + (11 - 10)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

Depois, somam-se as distâncias que a bola percorreu em cada trecho, sem esquecer de multiplicar o resultado por 10 (escala do gráfico).

$$\text{Distância} = (6,32 + 3,60 + 3,60 + 5 + 1 + 2,24 + 2,24 + 2,83 + 5 + 2,24) \cdot 10 = 34,07 \Rightarrow 34,07 \cdot 10 = 340,7 \text{ m.}$$

A distância aproximada percorrida pela bola é 340,7 m.

$$\text{b) } V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{340,7}{30} \approx 11,4 \text{ m/s}$$

A velocidade média da bola no percurso foi de 11,4 m/s.

Neste tema, você vai ver como traçar uma reta por meio da determinação de dois de seus pontos no plano cartesiano.

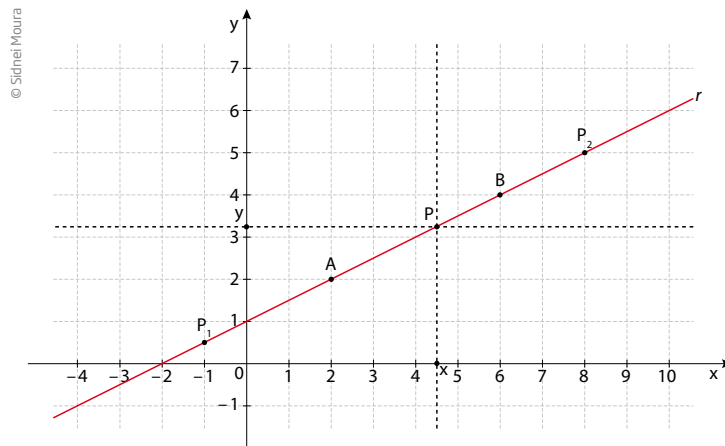
? O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já percebeu que os trilhos do metrô e do trem são formados por retas, que mantêm a mesma distância uma da outra em todo o seu percurso? E que, no mapa do metrô, algumas linhas se cruzam em determinados pontos?

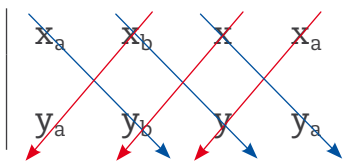
📖 O estudo da reta

Equação geral da reta

Imagine um ponto P móvel que esteja sempre alinhado a dois pontos fixos, A e B. Nessas condições, esse ponto P pode ocupar infinitas posições, e esses infinitos pontos alinhados aos pontos A e B determinam uma reta.



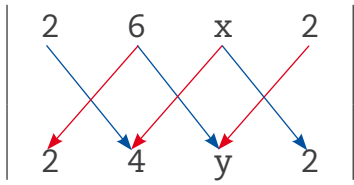
Considerando o que você já sabe sobre o alinhamento de pontos:



$$(x_a \cdot y_b + x_b \cdot y + x \cdot y_a) - (x_b \cdot y_a + x \cdot y_b + x_a \cdot y) = 0$$

Mas essa expressão, com todos os seus índices e letras, não ajudará a compreender o que será tratado a partir daqui. Existe outra forma que auxilia a melhor entender as condições que um ponto $P(x, y)$ deve satisfazer para estar alinhado a outros dois, os pontos A e B.

Considere dois pontos, A(2, 2) e B(6, 4) e substitua os valores das coordenadas desses dois pontos no dispositivo prático:



$$(2 \cdot 4 + 6y + 2x) - (6 \cdot 2 + 4x + 2y) = 0$$

$$(8 + 6y + 2x) - (12 + 4x + 2y) = 0$$

Eliminando os parênteses e agrupando os termos semelhantes:

$$8 - 12 + 2x - 4x + 6y - 2y = 0 \Rightarrow -2x + 4y - 4 = 0$$

Para ficar mais elegante, pode-se multiplicar tudo por -1 e obter a equação $2x - 4y + 4 = 0$. Dividindo os dois membros por 2, obtém-se:

$$x - 2y + 2 = 0$$

que é a **equação geral da reta** que passa pelos pontos A(2, 2) e B(6, 4).

Qualquer ponto (x, y) alinhado aos pontos A e B deve satisfazer a essa equação.

Explorações da equação da reta $x - 2y + 2 = 0$

- No gráfico apresentado, o ponto $(0, 1)$ do eixo das ordenadas parece estar alinhado aos pontos A e B. Substituindo-se na equação para verificar:

$$x - 2y + 2 = 0$$

$$(0) - 2 \cdot (1) + 2 = 0 - 2 + 2 = 0$$

Portanto, pode-se dizer que o ponto $(0, 1)$ pertence à reta r determinada pelos pontos A e B.

- O gráfico sugere que o ponto $(1, 0)$ do eixo das abscissas não pertence à reta. Para conferir sua veracidade substituem-se os valores numéricos do par ordenado na equação:

$$x - 2y + 2 = 0$$

$$(1) - 2 \cdot (0) + 2 = 1 - 0 + 2 = 3 \neq 0$$

Assim, pode-se concluir que o ponto $(1, 0)$ não pertence à reta r , ou seja, não está alinhado aos pontos A e B.

- Descobrir qual é o valor da ordenada do ponto $(8, y)$ para que ele pertença à reta r . Qualquer ponto da reta r deve satisfazer à equação $x - 2y + 2 = 0$.

Substituindo $(8, y)$ na equação, tem-se:

$$x - 2y + 2 = 0$$

$$(8) - 2 \cdot (y) + 2 = 8 - 2y + 2 = 0 \Rightarrow -2y + 10 = 0$$

$$\text{Resolvendo a equação: } 2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

O ponto $(8, 5)$ está alinhado aos pontos $A(2, 2)$ e $B(6, 4)$.

- Determinar o ponto do eixo das abscissas pertencente à reta que contém os pontos A e B .

Um ponto do eixo das abscissas é do tipo $(x, 0)$.

Substituindo na equação, tem-se:

$$x - 2y + 2 = 0$$

$$x - 2 \cdot (0) + 2 = 0 \Rightarrow x - 0 + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

O ponto $(-2, 0)$ pertence à reta que passa pelos pontos A e B .

Resumindo: O conjunto de todos os pontos do plano cartesiano alinhados a dois pontos fixos define uma reta.

Toda equação do tipo $ax + by + c = 0$, com a , b e c pertencentes aos números reais, é chamada **equação geral da reta**.

Equação reduzida da reta

Uma única reta no plano cartesiano pode ser representada de várias maneiras, pois sempre é possível fazer alguma manipulação algébrica para produzir equações equivalentes.

Veja o exemplo da equação $2x - 4y + 4 = 0$

São possíveis as seguintes transformações:

Trocar as posições dos termos da equação	$4 + 2x - 4y = 0$
Somar 10 aos dois membros	$14 + 2x - 4y = 10$
Subtrair 7 dos dois membros	$7 + 2x - 4y = 3$
Multiplicar tudo por 5	$35 + 10x - 20y = 15$
Dividir tudo por 10	$3,5 + x - 2y = 1,5$

Qualquer uma dessas equações representa a mesma reta que passa pelos pontos A(2, 2) e B(6, 4). Para conferir, substituem-se os valores dos pares ordenados, e assim verifica-se que a igualdade é verdadeira em todos os casos.

Dada uma equação geral do tipo $ax + by + c = 0$ com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, pode-se isolar o y e dividir os dois membros por b para obter uma equação equivalente:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

Como $-\frac{a}{b}$ e $-\frac{c}{b}$ são números reais, chamando $-\frac{a}{b}$ de m e $-\frac{c}{b}$ de n , pode-se reescrever a equação, que fica $y = mx + n$, chamada de **forma reduzida da equação da reta**.

Seja a equação $-6x + 3y + 9 = 0$. Isolando a variável y , obtém-se $3y = 6x - 9$. Dividindo tudo por 3, tem-se $y = \frac{6x}{3} - \frac{9}{3} = 2x - 3$.

As equações $-6x + 3y + 9 = 0$ e $y = 2x - 3$ são equivalentes e representam a mesma reta; a primeira está na forma de equação geral da reta, e a segunda, na forma reduzida.

Retome a equação da reta $2x - 4y + 4 = 0$ que passa pelos pontos A(2, 2) e B(6, 4):

$2x - 4y + 4 = 0$ isolando o termo em y no primeiro membro, fica...

$-4y = -2x - 4$ multiplicando tudo por -1 , tem-se...

$4y = 2x + 4$ dividindo tudo por 4, tem-se...

$$y = \frac{2x}{4} + \frac{4}{4} = \frac{1}{2}x + 1$$

A equação $y = \frac{1}{2}x + 1$ é chamada **equação reduzida da reta**; o coeficiente $\frac{1}{2}$ da variável x é chamado **coeficiente angular** da reta; e o coeficiente independente 1 é chamado **coeficiente linear**.

A equação de uma reta na forma reduzida é do tipo:

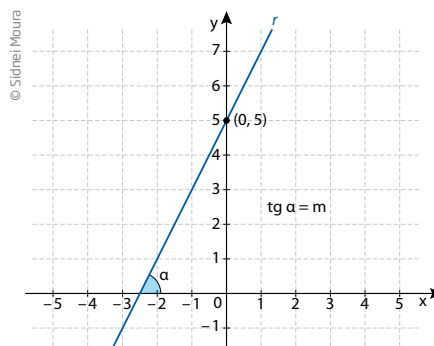
$$y = mx + n$$

Observe que essa forma se assemelha à expressão de uma função de 1º grau.

m é o coeficiente angular da reta e determina a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas; m é o valor numérico da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas.

n é o coeficiente linear da reta se $x = 0$, então

$y = m \cdot 0 + n \rightarrow y = n$, ou seja, o ponto $(0, n)$ pertence à reta, o que significa que n é o ponto de intersecção da reta com o eixo das ordenadas.



É muito útil saber o papel dos coeficientes da equação na forma reduzida, para saber mais sobre a reta que está sendo representada.

Comparando os coeficientes angulares de duas equações de retas, pode-se saber suas posições relativas. Conhecendo o coeficiente linear de uma equação de reta, pode-se determinar a intersecção dessa reta com o eixo das ordenadas.

Para compreender melhor, considere as equações das retas r , s e t :

$$r: 2x - y + 5 = 0$$

$$s: -x - y + 5 = 0$$

$$t: 6x - 3y - 12 = 0$$

É possível reescrever essas equações na forma reduzida e tirar conclusões sobre suas posições no plano cartesiano. Para tanto, em cada caso, isola-se y no primeiro membro:

$$\bullet 2x - y + 5 = 0 \Rightarrow -y = -2x - 5$$

Multiplicando os dois membros por -1 , tem-se:

$$y = 2x + 5$$

$$\bullet -x - y + 5 = 0 \Rightarrow -y = x - 5$$

Multiplicando os dois membros por -1 , tem-se:

$$y = -x + 5$$

$$\bullet 6x - 3y - 12 = 0 \Rightarrow -3y = -6x + 12$$

Dividindo os dois membros por -3 , tem-se:

$$y = 2x - 4$$

Agora, observe a análise dos coeficientes das três retas:

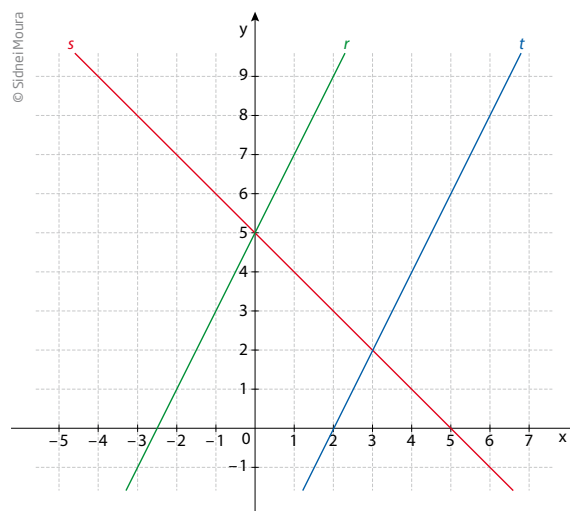
Reta	Forma reduzida	Coeficientes	
		Angular	Linear
<i>r</i>	$y = 2x + 5$	$m = 2$	$n = 5$
<i>s</i>	$y = -x + 5$	$m = -1$	$n = 5$
<i>t</i>	$y = 2x - 4$	$m = 2$	$n = -4$

Observe que os coeficientes angulares das retas *r* e *t* são iguais ($m = 2$). Isso significa que as duas retas têm a mesma inclinação em relação ao eixo das abscissas, ou seja, as retas *r* e *t* são **paralelas**.

Como o coeficiente angular da reta *s* é diferente dos coeficientes angulares de *r* e *t*, pode-se concluir que as retas *r* e *s* se interceptam (são **concorrentes**), assim como as retas *s* e *t*.

As retas *r* e *s* têm o mesmo coeficiente linear, ou seja, interceptam o eixo das ordenadas no mesmo ponto $n = 5$; a reta *t* intercepta o eixo das ordenadas no ponto $n = -4$.

Veja como ficariam as retas *r*, *s* e *t* no plano cartesiano:



ASSISTA!

Matemática – Volume 3

Geometria analítica

Esse vídeo relembra o plano cartesiano para, a seguir, explorar situações em que esse conhecimento é usado para localização. Também apresenta uma possibilidade de uso da Geometria Analítica partindo de um exemplo simples de função de 1º grau.

ATIVIDADE 1 Retas

1 Determine a equação da reta que passa pelos pontos:

a) $A(0, 0)$ e $B(2, 3)$

b) $C(-1, 2)$ e $D(3, 4)$

2 Determine a equação da reta que passa pelos pontos $(3, 0)$ e $(0, 4)$ na forma geral e reduzida.

3 Determine os coeficientes angulares e lineares de cada uma das retas cujas equações são:

a) $2x + 3y + 6 = 0$

b) $-3x + 5y - 15 = 0$

4 Encontre a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:

a) $(1, 2)$ e $(2, 5)$

b) $(1, 2)$ e $(2, 4)$

c) $(2, 2)$ e $(5, 5)$

5 Analise as equações I, II, III e IV. Depois, assinale a alternativa correta.

I) $x - y + 3 = 0$

II) $2x - 2y + 5 = 0$

III) $y = \frac{1}{2}x + 3$

IV) $-4x + 2y - 8 = 0$

- a) As retas I e III são paralelas.
- b) As retas I, II e IV têm coeficientes lineares iguais.
- c) As retas I e II são paralelas com o mesmo coeficiente linear.
- d) As retas II e III são concorrentes, pois seus coeficientes lineares são diferentes.
- e) As retas I e II são paralelas, independentemente do valor do coeficiente linear de ambas.

6 Quais das retas abaixo interceptam o eixo das ordenadas no ponto $y = 7$?

a) $x + y + 7 = 0$

b) $x - y + 7 = 0$

c) $x + y - 7 = 0$

d) $y - x + 7 = 0$

e) $y = 7x$

7 Qual das retas abaixo intercepta o eixo das ordenadas no ponto $y = -2$?

a) $2x + y + 4 = 0$

b) $-2x - y + 2 = 0$

c) $x + y + 2 = 0$

d) $3x - y + 6 = 0$

e) $y = 2x$

8 Há uma regra que permite saber se duas retas são perpendiculares, isto é, se formam um ângulo reto: basta multiplicar seus coeficientes angulares e verificar se o resultado é -1 .

Se duas retas, r e s , são perpendiculares, então $m_r \cdot m_s = -1$

Determine quais entre as retas a seguir são perpendiculares:

$$r: 2x + y + 1 = 0$$

$$t: x - 4y + 4 = 0$$

$$s: x + 2y + 6 = 0$$

$$u: y = 2x + 3$$

9 São dadas duas retas, r e s , cujas equações são:

$$r: 2x + 3y + 6 = 0$$

$$s: -3x + 2y - 6 = 0$$

a) Verifique se essas retas se interceptam ou se elas são paralelas.

DICA!

Resolva o sistema formado pelas duas equações.

b) No caso de se interceptarem, encontre o ponto de intersecção entre as duas retas.

10 Qual, entre as retas abaixo, contém o ponto $P(2, -3)$?

a) $2x + 3y + 6 = 0$

b) $5x + 4y + 2 = 0$

11 Determine a equação da reta que intercepta o eixo das abscissas no ponto $x = 5$ e o eixo das ordenadas no ponto $y = 2$.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Retas

1

a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & x & 0 \\ 0 & 3 & y & 0 \end{vmatrix}$$

$$(0 + 2y + 0) - (0 + 3x + 0) = 0$$

$$2y - 3x = 0 \rightarrow \text{equação geral da reta}$$

b)

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & x & -1 \\ 2 & 4 & y & 2 \end{vmatrix}$$

$$(-4 + 3y + 2x) - (6 + 4x - y) = 0 \rightarrow -4 + 3y + 2x - 6 - 4x + y = 0$$

$$-2x + 4y - 10 = 0 \text{ ou, dividindo ambos os membros por } -2, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow \text{equação geral da reta}$$

2

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & x & 3 \\ 0 & 4 & y & 0 \end{vmatrix}$$

$$(12 + 0y + 0x) - (0 + 4x + 3y) = 0 \Rightarrow 12 - 3y - 4x = 0$$

$$-4x - 3y + 12 = 0 \rightarrow \text{equação geral da reta}$$

$$y = \frac{(4x - 12)}{-3}$$

$$y = -\frac{4x}{3} + 4 \rightarrow \text{equação reduzida da reta}$$

3 Para resolver este exercício, encontram-se as equações reduzidas de cada item e, em seguida, verificam-se os coeficientes angular e linear.

$$\text{a) } 2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{(-2x - 6)}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow m = -\frac{2}{3} \text{ e } n = -2$$

$$\text{b) } -3x + 5y - 15 = 0 \Rightarrow y = \frac{(3x + 15)}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}x + 3 \Rightarrow m = \frac{3}{5} \text{ e } n = 3$$

4

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 2 & 5 & y & 2 \end{vmatrix}$$

$$(5 + 2y + 2x) - (4 + 5x + y) = 0 \Rightarrow 5 + 2y + 2x - 4 - 5x - y = 0 \Rightarrow -3x + y + 1 = 0$$

$$y = 3x - 1 \rightarrow \text{equação reduzida da reta}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 1 \\ 2 & 4 & y & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4 + 2y + 2x) - (4 + 4x + y) = 0 \Rightarrow 4 + 2y + 2x - 4 - 4x - y = 0 \Rightarrow y - 2x = 0$$

$$y = 2x \rightarrow \text{equação reduzida da reta}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & x & 2 \\ 2 & 5 & y & 2 \end{vmatrix}$$

$$(10 + 5y + 2x) - (10 + 5x + 2y) = 0 \Rightarrow 10 + 5y + 2x - 10 - 5x - 2y = 0 \Rightarrow -3x + 3y = 0$$

$$y = \frac{3x}{3} \Rightarrow y = x \rightarrow \text{equação reduzida da reta}$$

5 Alternativa correta: e. As retas I e II são paralelas, pois a equação reduzida de I é $y = x + 3$, a equação reduzida de II é $y = x + \frac{5}{2}$ e seus coeficientes angulares são iguais ($m_1 = m_2$).

6 Alternativas corretas: b e c. Para interceptar o eixo das ordenadas, o valor de x deve ser 0. Logo:

- a equação do item b satisfaz a condição de $x - y + 7 = 0 \Rightarrow 0 - y + 7 = 0 \Rightarrow -y = -7 \Rightarrow y = 7$;
- a equação do item c satisfaz a condição de $x + y - 7 = 0 \Rightarrow 0 + y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$.

7 Alternativa correta: **c**. Para interceptar o eixo das ordenadas, o valor de x deve ser 0. Logo, a equação do item **c** satisfaz a condição de $x + y + 2 = 0 \Rightarrow 0 + y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$.

8 Encontrando as equações reduzidas de r , s e t , tem-se:

$$r: y = -2x - 1$$

$$s: y = -\frac{1}{2}x - 3$$

$$t: y = \frac{1}{4}x + 1$$

A equação $u: y = 2x + 3$ já se encontra na forma reduzida. Substituindo seus coeficientes angulares na relação $m_1 \cdot m_2 = -1$, obtém-se que as retas perpendiculares são s e u .

$$m_s \cdot m_u \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (2) = -1.$$

9

a) Encontrando as equações reduzidas de r e s , tem-se $r: y = -\frac{2}{3}x - 3$ e $s: y = \frac{3}{2}x + 3$. Conclui-se que não são paralelas, pois $m_r \neq m_s$.

Porém, $m_r \cdot m_s = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = -1$; logo, elas são perpendiculares.

b) Para ver qual é o ponto de intersecção, deve-se resolver o sistema:

$$2x + 3y + 6 = 0 \quad (\cdot 3) \quad \Rightarrow \quad 6x + 9y + 18 = 0$$

$$-3x + 2y - 6 = 0 \quad (\cdot 2) \quad \Rightarrow \quad -6x + 4y - 12 = 0$$

Somando-se as duas equações, tem-se $13y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{6}{13}$

Substituindo em uma das equações $y = -\frac{6}{13}$, obtém-se:

$$2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot \left(-\frac{6}{13}\right) + 6 = 0 \Rightarrow 26x - 18 + 78 = 0 \Rightarrow 26x = -60 \Rightarrow x = -\frac{60}{26} \Rightarrow x = -\frac{30}{13}$$

O ponto de intersecção é $P\left(-\frac{30}{13}, -\frac{6}{13}\right)$.

10 Para resolver essa questão, basta substituir os valores numéricos das coordenadas do ponto P nas equações e verificar se a igualdade é mantida.

a) $2 \cdot (2) + 3 \cdot (-3) + 6 = 0 \rightarrow 4 - 9 + 6 = 1 \neq 0$

Não pertence.

b) $5 \cdot (2) + 4 \cdot (-3) + 2 = 0 \rightarrow 10 - 12 + 2 = 0$

Pertence.

Neste tema, você vai perceber que é possível representar uma circunferência também por meio de equações, utilizando o plano cartesiano.

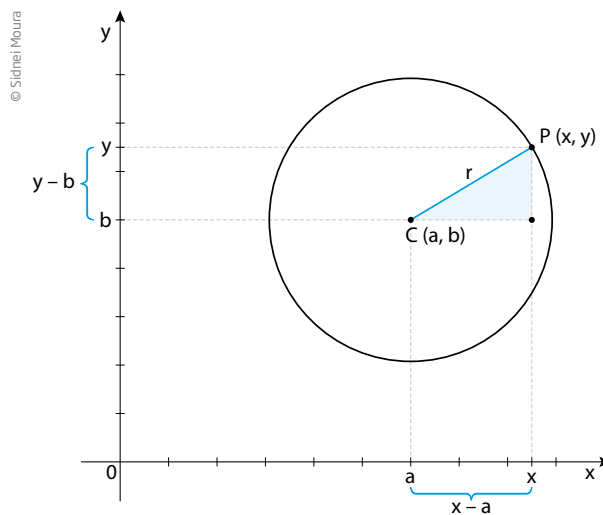
? O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já reparou que o símbolo das Olimpíadas é formado pela união de cinco circunferências? E que muitos logotipos são circulares?

As embalagens e peças publicitárias são desenhadas por meio de programas de computador. Você imagina como isso é feito? Esses programas interpretam equações da circunferência.

📖 Circunferência

O conjunto de todos os pontos equidistantes de um ponto fixo de coordenadas (a, b) a uma distância r é uma **circunferência** com **centro** em $C(a, b)$ e **raio** r .



Um ponto $P(x, y)$, nessas condições, satisfaz à relação obtida do teorema de Pitágoras:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Essa é a **equação da circunferência** de centro em $C(a, b)$ e raio r .

Para saber, por exemplo, qual é a equação da circunferência de centro no ponto $(6, 5)$ e raio $r = 3$, basta substituir na equação:

$$(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 9$$

Uma vez conhecida a equação da circunferência, pode-se saber se um ponto qualquer pertence à circunferência (se está sobre seu contorno) ou se está no interior ou no exterior dela. Para isso, valem as seguintes relações.

Seja um ponto $P(x, y)$ e uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r , se:

- $d_{pc} > r \rightarrow P$ é externo à circunferência;
- $d_{pc} = r \rightarrow P$ pertence à circunferência;
- $d_{pc} < r \rightarrow P$ é interno à circunferência.

Outro modo mais prático para saber se determinado ponto é interior, exterior ou se pertence à circunferência é substituir suas coordenadas na equação e verificar se o resultado é igual, maior ou menor que r^2 .

No exemplo da equação apresentada anteriormente, pode-se dizer com certeza qual é a posição relativa dos pontos $(6, 3)$, $(2, 2)$ e $(6, 2)$. Para isso, basta substituir os pontos na equação $(x - 6)^2 + (y - 5)^2 = 9$ e verificar o resultado.

Testando os pontos:

- $(6, 3) \rightarrow (6 - 6)^2 + (3 - 5)^2 = 0^2 + (-2)^2 = 0 + 4 < 9$

$(6, 3)$ é interior à circunferência.

- $(2, 2) \rightarrow (2 - 6)^2 + (2 - 5)^2 = (-4)^2 + (-3)^2 = 16 + 9 = 25 > 9$

$(2, 2)$ é exterior à circunferência.

- $(6, 2) \rightarrow (6 - 6)^2 + (2 - 5)^2 = 0^2 + (-3)^2 = 0 + 9 = 9$

$(6, 2)$ pertence ao contorno da circunferência.

ATIVIDADE 1 Equação da circunferência

1 Determine a equação da circunferência em que são dadas as coordenadas do centro e a medida do raio:

a) $C(0, 0)$, $r = 5$

b) $C(2, 3)$, $r = 1$

c) $C(3, -4), r = 5$

d) $C(0, 4), r = 4$

e) $C(3, 0), r = 3$

f) $C(-1, -2), r = 7$

2 São dadas as equações de quatro circunferências.

I) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

II) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

III) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

IV) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

a) Determine em que quadrante está o centro de cada circunferência.

I) _____

II) _____

III) _____

IV) _____

b) Determine o valor do raio de cada uma das circunferências.

I) _____

II) _____

III) _____

IV) _____

3 Qual das circunferências abaixo contêm os pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$?

a) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$

c) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

e) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

4 A equação da circunferência de diâmetro AB, dados $A(-1, 5)$ e $B(3, 3)$, é:

a) $x^2 + y^2 = 5$

b) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$

c) $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 3$

d) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$

e) $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 3$



Localização com GPS

Vivemos em uma era de grandes avanços nas comunicações e com grande desenvolvimento da tecnologia, em especial da informática, que parece não ter limites.

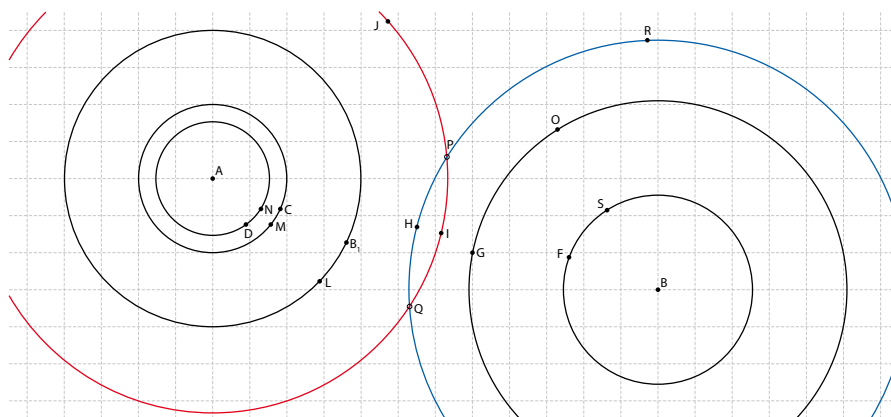
Nos últimos anos, nos acostumamos com aparelhos de celular de última geração, automóveis que usam aparelhos de localização por meio do GPS (sigla em inglês para Sistema Global de Posicionamento) e *softwares* que possibilitam ver tanto o telhado de nossa casa quanto uma praça no centro de Portugal.

Uma das novidades desses novos tempos é que, no momento em que alguém faz uma chamada por celular, a companhia de telefonia tem a localização exata daquele aparelho.

Isso tem sido usado das mais variadas maneiras, e tem seus prós e contras. Alguns, por exemplo, gostam de postar fotos que indicam onde estão, para que os amigos possam saber e, se for o caso, encontrá-los mais tarde. A localização de alguém por meio dessas tecnologias também permite aos órgãos de segurança desvendarem crimes, desde que os dados sejam acessados por intermédio de autorização judicial. Por outro lado, alguns questionam o perigo da invasão de privacidade.

Você deve estar se perguntando: O que isso tem a ver com o que estou estudando? O fato é que a possibilidade da localização por meio de GPS e outras tecnologias se faz por meio de coordenadas e equações matemáticas – trata-se de uma aplicação da Geometria Analítica, além de outras ferramentas matemáticas.

Os aparelhos celulares emitem sinais captados pelos sensores das torres de telefonia, que, conectadas a centrais de computadores, conseguem determinar a direção e a intensidade dos sinais, tornando possível localizar o aparelho por meio de suas coordenadas. Observe a figura a seguir: o processo de localização ocorre quando há intersecção de duas circunferências.



© Sidnei Moura

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Equação da circunferência

1

- a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$
- b) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1^2 \rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$
- c) $(x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = 5^2 \rightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$$d) (x - 0)^2 + (y - 4)^2 = 4^2 \rightarrow x^2 + (y - 4)^2 = 16$$

$$e) (x - 3)^2 + (y - 0)^2 = 3^2 \rightarrow (x - 3)^2 + y^2 = 9$$

$$f) (x - (-1))^2 + (y - (-2))^2 = 7^2 \rightarrow (x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 49$$

A equação da circunferência do item c, por exemplo, teria o seguinte desenvolvimento:

$$(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 25$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 + 16 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

2

a)

$$I) (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

O centro $(-1, 1)$ está no 2º quadrante.

$$II) (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

O centro $(1, 1)$ está no 1º quadrante.

$$III) (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

O centro $(-1, -1)$ está no 3º quadrante.

$$IV) (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

O centro $(1, -1)$ está no 4º quadrante.

b)

I) Raio $r = 1$.

II) Raio $r = 1$.

III) Raio $r = 1$.

IV) Raio $r = 1$.

3 Alternativa correta: **b**. Para resolver essa questão, a coordenada de cada ponto tem que satisfazer às equações. O mais fácil e rápido é testar o ponto $(0, 0)$ nas cinco equações e eliminar aquelas que não o contêm e, a seguir, testar os demais pontos nas equações que restarem.

$$a) (0 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

$$b) (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$

$$c) (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

$$d) (0 - 1)^2 + (0 + 1)^2 = (-1)^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

$$e) (0 + 1)^2 + (0 + 1)^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \neq 1$$

IMPORTANTE!

Cada uma dessas equações de circunferência pode ser desenvolvida pelo produto notável

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

O ponto $(0, 0)$ pertence somente às circunferências das equações dos itens a e b . É preciso, então, verificar se os pontos $(0, 2)$ e $(2, 0)$ satisfazem essas equações. Testando o ponto $(0, 2)$:

$$a) (0 - 1)^2 + (2 + 1)^2 = (-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 = 10 \neq 2$$

O ponto $(0, 2)$ não pertence à equação do item a .

$$b) (0 - 1)^2 + (2 - 1)^2 = (-1)^2 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$$

O ponto $(0, 2)$ pertence à equação do item b .

Testando se o ponto $(2, 0)$ pertence à circunferência do item b :

$$(2 - 1)^2 + (0 - 1)^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$

A única circunferência que contém os pontos $(0, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$ é a circunferência cuja equação está no item b .

4 Alternativa correta: **b**. Para resolver essa questão, determinam-se as coordenadas do centro que coincidem com o ponto médio do diâmetro. Em seguida, calcula-se a medida do raio.

Para encontrar as coordenadas do centro $C(x, y)$, é preciso lembrar que o centro é o ponto médio do diâmetro de extremidades $(-1, 5)$ e $(3, 3)$, portanto:

$$x_m = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1; y_m = \frac{5 + 3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Coordenadas do centro $C(1, 4)$.

Para determinar a medida do raio, basta calcular a distância do centro $C(1, 4)$ a qualquer um dos dois pontos da extremidade do diâmetro:

$$r = d_{BC} = \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = (\sqrt{5})^2$$

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 5$$



Registro de dúvidas e comentários

TEMAS

1. Problemas de combinatória
2. Permutações
3. Arranjos e combinações

Introdução

A Matemática é uma ciência que apresenta uma variedade de subáreas, como a Aritmética, a Geometria, a Estatística e a Álgebra, entre outras. Há um ramo particular da Matemática que deve ser estudado porque desenvolve um tipo especial de raciocínio e ajuda na resolução de um conjunto de problemas práticos: é a combinatória. É esse assunto que você estudará nesta Unidade.

No seu dia a dia, é provável que já tenha se deparado com ao menos um problema de natureza combinatória, por exemplo, o uso de senhas.

Qualquer pessoa que tenha conta em um banco precisa memorizar uma senha para poder acessar a conta. Ela é uma espécie de chave que protege os dados e o dinheiro. Há senhas de variados tipos: curtas, longas, com números ou letras, ou ainda há uma combinação de letras e números, também chamada alfanumérica.

Problemas de combinatória **TEMA 1**

Você já teve contato com uma variedade de problemas combinatórios, mesmo sem ter se dado conta. É possível até que tenha resolvido alguns desses problemas usando a intuição, o raciocínio lógico e o que você conhece sobre as operações básicas.

Neste tema, você aprofundará esse conhecimento e aprenderá a combinatória, uma importante ferramenta da Matemática para o cálculo de probabilidades.



O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você deve conhecer pessoas que fazem seguro de carro ou que jogam na loteria, não é? Você tem ideia de como se define o preço do seguro de um veículo ou quais são as chances de alguém ser sorteado na loteria?



Introdução à combinatória

Observe a análise de uma senha simples, daquelas de cadeados de bicicleta.



De acordo com esse sistema, uma senha é um número que vai de 000 a 999, portanto, para abrir o cadeado, pode-se acertar a senha na primeira tentativa ou ficar tentando até a última combinação; nesse caso, seriam necessárias 1.000 tentativas.

Veja como o raciocínio combinatório ajuda a determinar o total de combinações possíveis.

Para a 1ª posição são possíveis 10 dígitos (de 0 a 9).

10		
----	--	--

Para a 2ª posição também são possíveis 10 dígitos.

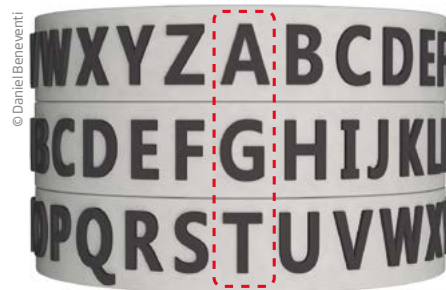
10	10	
----	----	--

E, para a 3ª e última posição, são possíveis 10 dígitos.

10	10	10
----	----	----

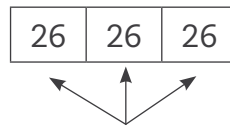
O total de combinações possíveis é $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1.000$.

Imagine agora um cadeado em que o disco de possibilidades comporta as 26 letras do alfabeto.



O número de combinações possíveis de um cadeado desse tipo é muito grande. Acompanhe o cálculo.

Como são 26 as letras do alfabeto, para acertar a letra de cada disco há 26 possibilidades. Combinando os três discos, tem-se:

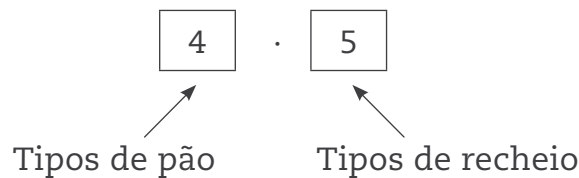


Possibilidades em cada disco

O total de combinações possíveis é $26 \cdot 26 \cdot 26 = 17.576$.

O raciocínio utilizado para determinar o total de combinações em um cadeado é semelhante ao que se emprega na resolução de outros problemas de natureza combinatória. Veja alguns exemplos.

Exemplo 1. Em determinada lanchonete, é possível montar sanduíches escolhendo entre 4 tipos de pão e 5 tipos de recheio. Para determinar todas as possibilidades de sanduíches, raciocina-se do seguinte modo:



Total de combinações: $4 \cdot 5 = 20$.

Exemplo 2. Numa competição, 3 atletas disputam os 3 primeiros lugares do pódio. Quantos são os resultados possíveis?

Imagine que os atletas são A, B e C. Nesse caso, são 6 os resultados possíveis:

A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

Para chegar a esse resultado por meio do cálculo, raciocina-se do seguinte modo: os 3 atletas, A, B e C, têm chances de chegar em 1º lugar. Suponha que B chegue primeiro:

B		
---	--	--

Agora há apenas 2 possibilidades para o 2º lugar; suponha que A chegue em seguida.

B	A	
---	---	--

Como só resta um atleta para a última posição, que é C, o número de possibilidades é 1.

B	A	C
---	---	---

O número total de combinações de chegada para os 3 atletas às 3 primeiras posições é:

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

O resultado

B	A	C
---	---	---

 é um entre os 6 possíveis.

Exemplo 3. Nas Copas do Mundo de futebol masculino, 32 equipes são distribuídas em 8 grupos com 4 equipes em cada um. Nos grupos, as seleções jogam entre si. Você sabe quantos jogos são realizados em cada grupo?

Nesse caso, não será feita a combinação listando-se os jogos. Para o cálculo de quantos jogos devem ser realizados, será utilizado o raciocínio combinatório. Acompanhe:

- são 4 equipes;
- cada equipe joga com todas as outras do mesmo grupo;
- portanto, cada equipe faz 3 jogos, pois uma equipe não joga com ela mesma;
- o total de jogos então seria $4 \cdot 3$;
- mas um jogo do tipo “equipe A × equipe B” é o mesmo jogo do tipo “equipe B × equipe A”. Logo, no cálculo anterior, cada jogo está sendo contado duas vezes;
- para corrigir isso, divide-se o resultado $4 \cdot 3$ por 2;
- total de jogos: $T = \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Exemplo 4. Numa empresa, os funcionários organizaram um bolão, do tipo loteria esportiva, em que os apostadores devem tentar acertar o resultado de 5 jogos.

Veja um modelo de cartela com um resultado marcado.

Loteria esportiva			
	1	x	2
JOGO 1	■	□	□
JOGO 2	□	□	■
JOGO 3	□	■	□
JOGO 4	■	□	□
JOGO 5	□	■	□

Jogar na coluna 1 significa apostar na vitória do time da casa; jogar na coluna do meio (x) significa apostar no empate entre as duas equipes; e marcar a coluna 2 significa apostar na vitória do time visitante (e derrota do time da casa).

Há 3 resultados possíveis para o jogo 1 (coluna 1, do meio ou 2); 3 para o jogo 2; 3 para o jogo 3; 3 para o jogo 4; e 3 para o jogo 5.

O total de combinações possíveis, por exemplo, para os dois primeiros jogos é:

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ resultados diferentes}$$

Como são 5 jogos, o número de combinações possíveis é:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243 \text{ resultados diferentes.}$$

Exemplo 5. Quantos números de 3 algarismos é possível formar com os números 0, 1, 2, 3 e 4?

Os números que se podem formar são da ordem das centenas, portanto devem ser números maiores que 99 e menores que 1.000. Isso quer dizer que o número não pode começar por 0 (zero), pois nesse caso o número não seria de 3 dígitos. Por exemplo, um número como 072 é menor que 99.

Assim, usando o raciocínio combinatório, são apenas 4 as possibilidades para preencher o algarismo das centenas, com os dígitos 1, 2, 3 e 4. Para a casa das dezenas e das unidades, pode-se escolher qualquer dígito, inclusive o 0 (zero). O total de combinações possíveis é:

$$\boxed{4} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{5}$$

Total: 100 combinações.

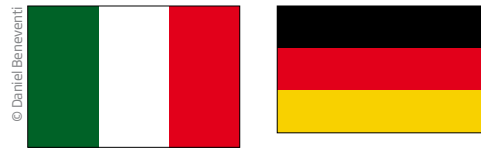
Exemplo 6. Quantos são os números pares de 3 dígitos que se podem formar com os números de 1 a 6?

Este problema é semelhante ao do exemplo 5, mas a restrição está na casa das unidades, que só pode ter os algarismos 2, 4 ou 6. Portanto, pode-se fazer a combinação raciocinando de trás para frente, começando pela casa das unidades, que tem 3 possibilidades de preenchimento, enquanto as casas das dezenas e das centenas têm 6 possibilidades cada.

$$\boxed{6} \cdot \boxed{6} \cdot \boxed{3}$$

O total de combinações possíveis é 108.

Exemplo 7. As bandeiras de determinados países, como a da Itália e a da Alemanha, são formadas por listras verticais ou horizontais.



Um time de futebol resolveu criar uma bandeira com 4 listras horizontais de mesma espessura nas cores vermelha, amarela e verde. Quantas bandeiras diferentes podem ser criadas com essa regra?

1ª listra
2ª listra
3ª listra
4ª listra

Há 3 possibilidades de escolha para a cor da primeira listra, mas só há 2 possibilidades de cor para a 2ª listra, pois, ao se repetir a cor da 1ª listra, haverá uma única listra grossa, e as bandeiras têm que ter 4 listras de mesma espessura. Do mesmo modo, a cor da 3ª listra não pode repetir a cor da 2ª listra, e a 4ª listra não pode ser da mesma cor da 3ª. Logo, para determinar todas as possibilidades, basta multiplicar:

$$\boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{2} = 24$$

Com essas regras, é possível construir 24 bandeiras diferentes.

**ASSISTA!**

Matemática – Volume 3

Análise combinatória

Nesse vídeo, mostra-se a aplicação da análise combinatória em situações do dia a dia, como a combinação de peças de roupas no momento de fazer as malas para uma viagem.



Princípio fundamental da contagem

O raciocínio utilizado em todos os problemas propostos até aqui utiliza o que se chama de **princípio fundamental da contagem (PFC)**, ou princípio multiplicativo, que poderia ser expresso do seguinte modo:

Se um evento (acontecimento, escolha ou combinação) é composto de k etapas distintas, a 1ª etapa pode ocorrer de n maneiras distintas, a 2ª etapa de m maneiras distintas, a 3ª etapa de p maneiras distintas, e assim sucessivamente. Então, o evento poderá ocorrer por meio do produto entre as etapas.

ATIVIDADE**1**

Problemas de combinatória e o princípio fundamental da contagem

- 1** Marta tem 5 saias, 6 blusas e 4 pares de sapatos. De quantos modos diferentes ela pode se vestir combinando saia, blusa e sapatos?
- 2** Numa lanchonete, é possível montar o próprio sanduíche combinando 5 tipos de pão, 6 tipos de recheio e 3 tipos de molho. Quantos sanduíches diferentes podem ser montados?
- 3** Quantos são os jogos de um campeonato de futebol que tem turno (jogos de ida) e retorno (jogos de volta), do qual participam 20 equipes?

4 Num campeonato com 8 equipes, todos jogam contra todos apenas uma vez. Quantos jogos são realizados nesse campeonato?

5 Numa festa, há 8 moças e 9 rapazes. Se todos dançarem com todos, quantos pares diferentes é possível formar?

6 O segredo de um cadeado é formado pelos números de 0 a 9, que estão em cada um de seus 4 discos. Determine o total de combinações possíveis.

7 O sistema de emplacamento de veículos no Brasil já teve vários modelos. De 1969 até 1990, era adotado um sistema que utilizava 2 letras e 4 números.



© Daniel Beneventi

Supondo que não haja restrições para a formação das placas, determine o total de combinações possíveis que esse sistema permitia.

8 A partir de 1990, passou a vigorar o sistema de 3 letras e 4 números. Determine o total de carros que podem ser emplacados de acordo com esse sistema.



© Daniel Beneventi

9 Em alguns países, como a Argentina, as placas dos veículos são compostas por 3 letras seguidas de 3 números. Determine quantas combinações são possíveis nesse caso.



© Daniel Beneventi

10 Descubra qual dos sistemas possibilita emplacar mais veículos:

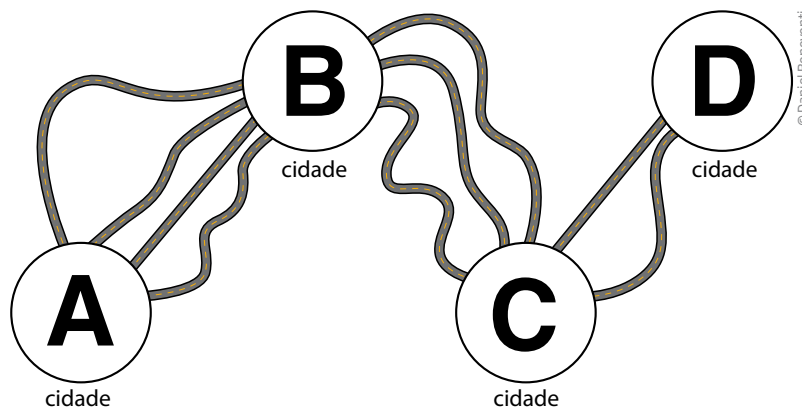
a) um que utiliza 3 letras e 3 números ou outro que utiliza 2 letras e 4 números?

b) um que utiliza 2 letras e 5 números ou outro que utiliza 3 letras e 3 números?

11 Uma cidade foi formada, e seus habitantes decidiram que a bandeira será um retângulo com 4 listras verticais em que as cores poderão ser escolhidas entre vermelho, azul, verde e amarelo. Com essas regras, quantas bandeiras diferentes podem ser feitas?

12 Quatro cidades estão interligadas por meio de um conjunto de estradas. Para ir da cidade A à cidade D, é preciso passar pelas cidades B e C, que ficam no meio do caminho.

Para ir da cidade A à cidade B, há 4 estradas; da cidade B à cidade C, há 3 estradas; e da cidade C à cidade D, 2 estradas. Determine o total de caminhos possíveis para se ir:



a) de B até C

b) de D até B

c) de A até D

d) de B até D

13 Uma pessoa utiliza um dado cúbico (de 6 faces) para escolher números de 2 dígitos que serão usados como códigos. Para isso, ela joga o dado duas vezes: a primeira para escolher o algarismo das dezenas, e a segunda para escolher o algarismo das unidades.

a) Quantos números de dois dígitos podem ser formados?

b) Quantos números pares podem ser formados?

c) Quantos números ímpares podem ser formados?

d) Quantos números múltiplos de 5 podem ser formados?

14 Usando o mesmo dado, determine quantos números pares de 3 dígitos é possível formar.

15 Quantos números de 3 algarismos distintos existem em nosso sistema decimal?



DESAFIO

Um certo tipo de código usa apenas dois símbolos, o número zero (0) e o número um (1) e, considerando esses símbolos como letras, podem-se formar palavras. Por exemplo: 0, 01, 00, 001 e 110 são algumas palavras de uma, duas e três letras desse código. O número máximo de palavras, com cinco letras ou menos, que podem ser formadas com esse código é:

- a) 120
- b) 62
- c) 60
- d) 20
- e) 10

Unesp 2004. Disponível em: <http://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada/Unesp/2004/1dia/UNESP2004_1dia.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Problemas de combinatória e o princípio fundamental da contagem

1 Aplicando o princípio fundamental da contagem, as possibilidades são $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$. Marta pode fazer combinações de saias, blusas e sapatos de 120 maneiras diferentes.

2 Na lanchonete, as combinações possíveis são de $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ tipos de sanduíches.

3 No primeiro turno, cada uma das 20 equipes joga com 19 adversários, em um total de $20 \cdot 19 = 380$ jogos. Mas como, por exemplo, Corinthians \times Palmeiras e Palmeiras \times Corinthians é o mesmo jogo, é preciso dividir o resultado por 2, pois, do modo calculado, cada jogo é contado duas vezes. No primeiro turno, portanto, haverá $380 \div 2 = 190$ jogos, o mesmo número de jogos do retorno. No total, são 380 jogos no campeonato.

4 Cada uma das equipes joga com as outras 7 uma única vez, portanto $8 \cdot 7 = 56$. Divide-se por 2 para se eliminarem as duplicações $\rightarrow 56 \div 2 = 28$ jogos realizados no campeonato.

5 $8 \cdot 9 = 72$ pares diferentes. Cada uma das 8 moças dança com os 9 moços.

6 Cada disco do cadeado permite 10 alternativas de escolha. Portanto, pelo princípio fundamental da contagem, existem $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$ combinações.

7 Como são 26 as letras do alfabeto, são $26 \cdot 26$ os agrupamentos diferentes que podem ser feitos com 2 letras e $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ agrupamentos diferentes com os 4 números.

Total: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 6.760.000$.

Previendo que o número de automóveis no Brasil superaria essa marca, o governo mudou o sistema de placas.

8 Usando o raciocínio do exercício anterior, tem-se que $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 175.760.000$ carros podem ser emplacados de acordo com esse sistema.

9 São possíveis $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 17.576.000$ combinações de placas.

10

a) Compare os dois sistemas:

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Os dois números diferem em apenas um fator e $26 > 10$. O primeiro sistema permite que sejam feitos $\frac{26}{10} = 2,6$ vezes mais emplacements.

b) Compare os dois sistemas

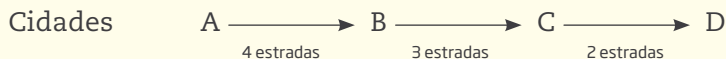
$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Nesse caso, o primeiro sistema permite mais emplacements, pois $10 \cdot 10 > 26$. Ele permite que sejam feitos $\frac{100}{26} = 3,84$ vezes mais emplacements.

11 Pelo princípio fundamental da contagem, há 4 possibilidades para a primeira listra e 3 para as demais $\rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 108$ bandeiras diferentes.

12 Para resolver cada item, basta utilizar o princípio fundamental da contagem:



- a) Há 3 estradas de B até C.
- b) $2 \cdot 3 = 6$ caminhos diferentes.
- c) $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ caminhos diferentes.
- d) $3 \cdot 2 = 6$ caminhos diferentes.

Atente para o fato de que, ao ir de D para B, o número de caminhos é o mesmo que ir de B para D.

13

a) $6 \cdot 6 = 36$ (pois é permitida a repetição; um número como 44, por exemplo, é um número de dois dígitos).

b) Para que o número seja par, tem que terminar em 2, 4 ou 6 (números pares das faces de um dado), então $6 \cdot 3 = 18$.

c) Para cada posição na casa das dezenas, há 6 possibilidades; para a casa das unidades, apenas 3 (faces 1, 3 e 5). Assim, $6 \cdot 3 = 18$ números ímpares. Observe que o número de possibilidades de ocorrência de pares e ímpares é o mesmo, e que 18 é a metade de 36 ($6 \cdot 6 = 36$ faces).

d) Para que um número seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades tem que ser 0 (zero) ou 5. Como não existe uma face do dado com 0, só é possível sair o 5. O número de possibilidades é $6 \cdot 1 = 6$ (são os números 15, 25, 35, 45, 55 e 65).

14 Para cada posição na casa das centenas e das dezenas, há 6 possibilidades; para a casa das unidades, apenas 3 (faces 2, 4 e 6). As combinações possíveis são $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$.

15 Para a casa das centenas, são possíveis 9 dígitos, pois um número de 3 algarismos não pode começar com zero; para a casa das dezenas, há também 9 possibilidades, uma vez que só não se pode utilizar o número escolhido para a casa da centena; por fim, para a casa das unidades, há 8 possibilidades (não é possível usar os dois números já utilizados).

Pelo princípio fundamental da contagem, tem-se $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, que é o total de números com 3 algarismos distintos existente em nosso sistema decimal.

Desafio

Alternativa correta: **b**. Considerando que, em cada caso, a repetição de símbolos é possível, tem-se:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \text{ símbolo: } 0,1 \rightarrow 2 \text{ possibilidades} \\ (2) \text{ símbolos: } 2 \cdot 2 \rightarrow 4 \text{ possibilidades} \\ (3) \text{ símbolos: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow 8 \text{ possibilidades} \\ (4) \text{ símbolos: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow 16 \text{ possibilidades} \\ (5) \text{ símbolos: } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \rightarrow 32 \text{ possibilidades} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Total} \rightarrow 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$



Registro de dúvidas e comentários

Todos os problemas apresentados no tema anterior são de natureza combinatória, mas, considerando algumas de suas características específicas, os matemáticos os agruparam e desenvolveram fórmulas para resolvê-los.

Neste tema, você vai se aprofundar nessa questão, resolvendo outros problemas e usando o princípio fundamental da contagem.



O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Provavelmente você já precisou entrar em uma fila. Mas como se determina essa fila? Se houvesse 10 pessoas agrupadas e fosse necessário formar uma fila, quem ficaria em primeiro lugar? E em segundo? Em quantas posições uma dessas pessoas poderia ficar? Matematicamente, é possível determinar isso, e é esse assunto que você estudará a seguir.



Permutação e fatorial de um número

Observe alguns exemplos que utilizam conceitos de permutação e de fatorial.

Exemplo 1. De quantas maneiras é possível formar um número de 4 dígitos usando 1, 2, 3 e 4 sem repeti-los?

Como não se pode repetir dígitos, o número 2.341 pode ser formado, mas o número 3.423, por exemplo, não, pois nesse caso o dígito 3 se repete.

Para resolver o problema, usa-se o princípio fundamental da contagem.

Há 4 possibilidades para a casa do milhar:

$$\boxed{4} \cdot \boxed{} \cdot \boxed{} \cdot \boxed{}$$

Uma vez escolhida a casa do milhar, sobram 3 números para a casa das centenas:

$$\boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{} \cdot \boxed{}$$

Preenchidas as casas do milhar e da centena, restam 2 números para a casa das dezenas:

$$\boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1}$$

Após a definição de que número ficou na casa das dezenas, só sobra um número para completar e preencher a casa das unidades.

O total de maneiras diferentes, portanto, é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

1.234	1.243	1.324	1.342	1.423	1.432
2.134	2.143	2.314	2.341	2.413	2.431
3.124	3.142	3.214	3.241	3.412	3.421
4.123	4.132	4.214	4.241	4.312	4.321

Exemplo 2. Imagine 5 atletas que disputam as 5 primeiras posições de uma corrida.

Da mesma maneira raciocinada no problema do exemplo anterior, há 5 possibilidades para o 1º lugar. Após a chegada do campeão, restam 4 possibilidades para o 2º lugar. Uma vez preenchidos os dois primeiros lugares, restam 3 atletas disputando o 3º lugar, e, em seguida, 2 para o 4º lugar e apenas 1 para a última posição, uma vez que os outros quatro já chegaram.

O número de resultados possíveis em uma corrida com 5 atletas que disputam 5 lugares é, portanto, $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Exemplo 3. Outro tipo de problema envolve o agrupamento de letras para formar palavras, o que se denomina **anagrama**.

Anagrama é a troca das letras de uma palavra para formar uma nova palavra, por exemplo:

- AMOR é um anagrama da palavra ROMA.
- RAMO é um anagrama da palavra AMOR.

Nesses dois casos, todas as palavras são de nosso vocabulário, mas um anagrama não precisa necessariamente formar uma palavra conhecida, por exemplo:

- A palavra NAMPRBUCEO é um anagrama da palavra PERNAMBUCO.

Veja como calcular o número de anagramas da palavra GRUPOS.

Um anagrama da palavra GRUPOS é uma palavra de 6 letras formada pelo arranjo das letras G, R, U, P, O e S usando todas as letras (portanto, sem repetir nenhuma delas).

Para a inicial da palavra, existem 6 possibilidades; 5 para a posição seguinte; 4 para a próxima, e assim por diante, até a última posição.

$$\boxed{6} \cdot \boxed{5} \cdot \boxed{4} \cdot \boxed{3} \cdot \boxed{2} \cdot \boxed{1}$$

O número de anagramas da palavra GRUPOS é 720.

Aos problemas em que se têm de agrupar n elementos em n posições, sem que se repitam elementos, dá-se o nome de **permutação**.

Esse é o caso deste problema e dos resolvidos nos exemplos 1 e 2.

Observe que, nos exemplos, foi preciso fazer uma multiplicação do tipo:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Trata-se do produto de um número natural por todos os seus antecessores, até o 1.

Esse tipo de produto é chamado fatorial do número n e se escreve colocando um ponto de exclamação depois do número:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \text{ para } n \geq 2$$

Assim, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Note que, na composição de $5!$, tem-se $4!$:

$$5! = 5 \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \cdot 4!$$

$$7! = 7 \cdot (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 7 \cdot 6!$$

Generalizando:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Isso torna possível simplificar determinados cálculos, por exemplo:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} = 8 \cdot 7 = 56$$

Veja que não foi necessário calcular $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

O mesmo ocorre com o cálculo de $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Ou com a determinação do valor de $\frac{100!}{99!} = \frac{100 \cdot \cancel{99!}}{\cancel{99!}} = 100$.

ATIVIDADE 1 Permutação, anagramas e fatoriais

1 Quatro amigas resolveram tirar fotos em uma escadaria com 4 degraus, e cada uma delas deverá ficar em um degrau. Quantas fotos diferentes podem ser tiradas?

- 2 De quantos modos 7 pilotos podem alinhar 7 carros em fila indiana?
- 3 Determine o número de anagramas da palavra ESCOLA.
- 4 Quantos anagramas da palavra ESCOLA começam com a letra S?
- 5 Quantos anagramas da palavra ESCOLA começam por vogal?
- 6 Determine o número de anagramas da palavra FUTEBOL.
- 7 Em uma estante, deseja-se arrumar os livros de Matemática, Língua Portuguesa, Física, Química, Biologia, História, Geografia e Arte. De quantas maneiras diferentes é possível organizar esses 8 livros?

M	LP	F	Q	B	H	G	A
---	----	---	---	---	---	---	---

8 Calcule:

a) $\frac{9!}{7!}$

c) $\frac{7!}{4!}$

b) $\frac{12!}{10!}$

d) $\frac{20!}{18!}$

e) $\frac{10!}{7!3!}$

f) $\frac{8!}{5!3!}$

9 Simplifique:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

b) $\frac{(n+1)!}{n!}$



DESAFIO

1 Com as letras da palavra PROVA podem ser escritos x anagramas que começam por vogal e y anagramas que começam e terminam por consoante. Os valores de x e y são, respectivamente:

- a) 48 e 36 d) 24 e 36
 b) 48 e 72 e) 72 e 24
 c) 72 e 36

Universidade Federal Fluminense (UFF), 1997. Disponível em: <http://www.coseac.uff.br/vest97/provas/mate_f1.htm>. Acesso em: 30 out. 2014.

2 Considere todos os números inteiros positivos que podem ser escritos permutando-se os algarismos do número 2.341. Quantos dos números considerados são menores que 2.341?

- a) 9 d) 84
 b) 15 e) 120
 c) 27

Universidade Estadual de Londrina (UEL), 1999. Disponível em: <<http://www.cneconline.com.br/exames-educacionais/vestibular/provas/pr/uel/1999/1o-semester-fase-unica/uel-1999-1-0a-completa.pdf>>. Acesso em: 30 out. 2014.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Permutação, anagramas e fatoriais

1 Esse é um problema de permutação, que pode ser resolvido pelo princípio fundamental da contagem, ou seja, calculando-se $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ fotos distintas.

2 Essa é uma permutação de 7 elementos (os pilotos) em 7 posições possíveis: $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040$. Há 5.040 modos de alinhar os carros.

3 Essa é uma permutação de 6 elementos (as letras da palavra ESCOLA) em 6 posições. $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Há 720 anagramas.

4 Se a palavra tem que começar com S, então somente as letras E, C, O, L e A é que trocam de lugar. Portanto, é uma permutação de 5 elementos (as letras da palavra ESCOLA) em 5 posições: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Há 120 anagramas que começam com S.

São exemplos de anagramas com essa condição as palavras SACOLE e SOLECA.

5 Para que o anagrama da palavra ESCOLA comece por vogal, a primeira posição só poderá ter as letras E, O e A. Em cada caso, tem-se a permutação de 5 letras em 5 posições:

$$E \text{ ______ } \rightarrow 5! = 120$$

$$O \text{ ______ } \rightarrow 5! = 120$$

$$A \text{ ______ } \rightarrow 5! = 120$$

O total de anagramas da palavra ESCOLA que começam por vogal é $3 \cdot 5! = 3 \cdot 120 = 360$.

Esse problema também poderia ser resolvido utilizando-se outra estratégia, como a usada na resolução do exercício 3. Como metade das letras da palavra ESCOLA são vogais, a metade dos anagramas de ESCOLA começam por vogal $\rightarrow 720 \div 2 = 360$.

6 FUTEBOL tem 7 letras, portanto o número de anagramas é $7! = 7 \cdot 6!$

Como você já calculou $6!$ no exercício 3, basta multiplicar $7 \cdot 720 = 5.040$.

7 São 8 os livros para ser colocados em 8 posições, portanto $8! = 8 \cdot 7! = 8 \cdot 5.040 = 40.320$.

8

$$a) \frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 9 \cdot 8 = 72$$

$$b) \frac{12!}{10!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 12 \cdot 11 = 132$$

$$c) \frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

$$d) \frac{20!}{18!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$$

$$e) \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$$

$$f) \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 8 \cdot 7 = 56$$

9

$$a) \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$b) \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = n+1$$

Desafio

1 Alternativa correta: a. São duas as vogais; logo, há apenas duas opções para a primeira letra, restando 4 letras que podem ocupar as demais 4 posições de $4! = 24$ maneiras distintas. Portanto, $x = 2 \cdot 24 = 48$. Há 48 anagramas da palavra PROVA que começam por vogal.

O raciocínio para determinar o número de anagramas que começam e terminam por consoante é semelhante.

Atente para a primeira e a última letras; há 3 possibilidades de consoantes para a primeira letra, restando 2 possibilidades para a última: $\underline{3} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} \cdot \underline{2}$

As possibilidades de preenchimento das três posições do meio são $3! = 6$. Portanto, $y = 3 \cdot 3! \cdot 2 = 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$.

Assim, $x = 48$ e $y = 36$.

2 Alternativa correta: a. Os algarismos a serem permutados são 1, 2, 3 e 4, assim o total de números que podem ser formados é dado por $4!$.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Desses 24, é preciso verificar quantos começam por 1, quantos começam por 2, por 3 e por 4.

Começando por 1:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Começando por 2:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Começando por 3:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Começando por 4:

$$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

Para que o número seja menor que 2.341, não pode começar nem por 3 nem por 4. Assim, excluem-se 12 números.

Restam 12 números, dos quais 6 certamente são menores que 2.341, pois começam por 1. Resta saber sobre os que iniciam com 2, que são listados a seguir:

2.143

2.134

2.314

2.341

2.413

2.431

Desses 6, 3 são menores que 2.341. Sendo assim, o total dos menores que 2.341 será:

$$6 + 3 = 9$$

O que você aprendeu sobre princípio fundamental da contagem, permutações e fatorial será útil para que agora resolva novos problemas sobre agrupamentos, alguns deles mais complexos. Há dois tipos de agrupamento; um é chamado **arranjo**, e o outro, **combinação**. Você os estudará neste tema por meio de exemplos.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já participou de alguma atividade em que havia a necessidade de se escolher pessoas para formar uma comissão de formatura? Ou mesmo escolher 6 números para jogos de loterias? Será que a ordem desses elementos escolhidos, tanto da comissão como dos números para jogos de loterias, importa no conjunto? Escolher João e Maria para representar a turma na formatura e anotar, na folha, Maria e João torna os representantes diferentes? Ou, ainda, escolher os números 10, 12 e 21 e anotar, no volante, os números 12, 21 e 10 dá origem a um jogo diferente?

A diferença entre arranjo e combinação

Observe alguns exemplos que utilizam conceitos de arranjo e de combinação.

Exemplo 1. André, Beto, Carlos, Daniela e Elena realizaram uma competição de corrida valendo posições para os dois primeiros lugares. Quantos são os resultados possíveis para compor o pódio com o 1º e 2º lugares?

Como são 5 os concorrentes e apenas 2 as posições, pelo princípio fundamental da contagem, tem-se:

$$\boxed{5} \cdot \boxed{4} = \boxed{20}$$

Há 20 resultados possíveis para a competição de corrida entre os atletas.

Em um **arranjo simples**, arranjam-se n elementos em p posições possíveis, e, ao se trocar a ordem dos elementos, tem-se um agrupamento diferente, isto é, a **ordem importa**.

Em situações mais complexas, em que o número de elementos a serem manipulados é muito grande, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$A_p^n = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ para } n \geq p$$

No exemplo da competição de corredores, $n = 5$ e $p = 2$. Logo,

$$A_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20 \text{ resultados possíveis}$$

Exemplo 2. Em outra ocasião, essas mesmas pessoas foram eleitas por seus colegas para compor uma comissão com 2 membros. Quantas são as possibilidades de composição dessa comissão?

Esse problema é semelhante ao do exemplo anterior, mas há um pequeno e importante detalhe que será discutido em seguida.

De acordo com o problema anterior, seriam 20 os resultados possíveis, e se poderia pensar que, para este problema, os números seriam os mesmos: $5 \cdot 4 = 20$.

Entretanto, se no caso da competição o agrupamento AB é diferente do agrupamento BA, pois, apesar de contar com os mesmos atletas, as posições são distintas, no caso de uma comissão a **ordem não importa**. Assim, o agrupamento AB é o mesmo que o agrupamento BA. E isso ocorre com todos os agrupamentos de dois elementos $\{B, C\} = \{C, B\}$, $\{D, E\} = \{E, D\}$. Para resolver o problema, portanto, é preciso dividir 20 por 2, para excluir as comissões que foram contadas duas vezes:

$$20 \div 2 = 10$$

São 10 as comissões de 2 atletas possíveis com 5 atletas.

Exemplo 3. Em uma corrida de 5 pessoas para 2 posições, o 1º e 2º lugares, todos os arranjos a seguir são diferentes:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

Em uma **combinação simples**, arranjam-se n elementos em p posições possíveis, e se a ordem dos elementos for alterada, tem-se o mesmo agrupamento, isto é, a **ordem não importa**.

Exemplo 4. Com os atletas A, B, C, D e E são possíveis as seguintes comissões de 2 membros:

AB	BA	CA	DA	EA
AC	BC	CB	DB	EB
AD	BD	CD	DC	EC
AE	BE	CE	DE	ED

No quadro acima foram excluídas as combinações que já foram formadas.

Em situações mais complexas, em que o número de elementos a serem manipulados é muito grande, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}, \text{ para } n \geq p$$

No exemplo anterior, tem-se que $n = 5$ e $p = 2$. Logo,

$$C_2^5 = \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ combinações}$$

ATIVIDADE 1 Arranjos e combinações

1 Para participar de uma competição internacional de atletismo, foram selecionados 5 atletas, mas a competição permite que apenas 3 deles representem seu país. De quantas maneiras diferentes se pode formar a equipe que representará o país?

2 Foi realizada uma eleição no sindicato. A chapa precisa nomear uma comissão com três representantes, sendo que se candidataram 8 membros para compor essa chapa. De quantos modos diferentes é possível formar tal comissão?

3 Em uma reunião com 8 pessoas, todos se cumprimentaram uma única vez com um aperto de mãos. Quantos foram os cumprimentos?

4 A diagonal de um polígono é um segmento que liga 2 vértices não consecutivos. Assim, uma diagonal é determinada pelo agrupamento de duas letras que representam os vértices do polígono.

a) Determine a quantidade de diagonais de um hexágono.

b) Quantas diagonais tem um polígono de 10 lados?



Para jogar na Mega-Sena, escolhem-se 6 números entre 60.

Refleta: A ordem dos números escolhidos é importante? Essa situação é de arranjo ou de combinação?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Arranjos e combinações

1 Em uma escolha de representantes, a ordem em que as pessoas são escolhidas não importa, então esse é um problema de combinação e pode-se aplicar a fórmula:

$$C_p^n = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} \rightarrow C_3^5 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

2 Como são 8 candidatos para ocupar 3 vagas, a ordem da comissão não importa. Por exemplo, são os membros da comissão A, B, C, D, E, F, G, H; a comissão formada pelos membros A, B, C é a mesma comissão formada pelos membros C, B, A; logo, trata-se de uma combinação

$$C_3^8 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = 56 \text{ combinações diferentes.}$$

3 Nesse caso, há uma combinação de 8 elementos, dois a dois $\rightarrow \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ cumprimentos. Ou

$$\text{aplica-se a fórmula } C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} = 28$$

4

a) Uma diagonal é como se cada vértice do polígono “cumprimentasse” outro, desde que não seja um vértice vizinho, pois, ao se agruparem dois vértices consecutivos, o que se obtém é um lado, e não uma diagonal. Lembre-se ainda de que combinar um vértice com ele mesmo não forma um segmento. Portanto, cada um dos 6 vértices forma uma diagonal se for combinado com 6 – 3 outros vértices. O cálculo seria $D = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$ diagonais.

$$D = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ diagonais.}$$

b) Usando o mesmo raciocínio do item a, tem-se $D = \frac{10 \cdot (10-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$ diagonais.



Registro de dúvidas e comentários

TEMAS

1. Introdução à Probabilidade
2. Roletas e probabilidades geométricas

Introdução

Você já prestou atenção nas previsões do tempo que são comunicadas nos noticiários de TV? Se o apresentador diz que poderá chover no dia seguinte, você pode ter certeza de que choverá?

E um campeonato que está nas rodadas finais, se os especialistas disserem que determinado time tem 90% de chance de ser campeão, significa que a taça está garantida para essa equipe?

Você sabia que o preço do seguro de um automóvel é calculado de acordo com o perfil do motorista? Se o motorista for mais jovem, o seguro pode ficar mais caro; se for uma mulher, pode ficar mais barato. Por que será?

Essas e outras situações do dia a dia envolvem a ideia de incerteza e um campo da Matemática com ampla aplicação em várias áreas do conhecimento: a Probabilidade.

Introdução à Probabilidade

TEMA 1

Neste tema, você verá como é possível quantificar um evento incerto por meio de um número ou uma função matemática.



O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Provavelmente você já ouviu a previsão do tempo, não é? Como será que ela é feita? É possível confiar nas previsões com toda certeza? Por quê?



A incerteza

Muitas são as situações em que não é possível prever um resultado ou ter certeza de que algo poderá ou não acontecer. É o caso das previsões do tempo e outros fenômenos da natureza, como a erupção de vulcões ou a ocorrência de terremotos, tufões e tsunamis.

Além dessas, há ainda outras situações cujo resultado não pode ser previsto, como sorteios, lançamento de dados ou uma simples disputa de “cara ou coroa”; sequer é possível determinar, logo após a concepção, o sexo de um bebê que vai nascer. O ramo da Matemática que estuda as leis do acaso chama-se **probabilidade**.

Analise com atenção a situação descrita a seguir.

No início de uma partida de futebol, é comum o juiz jogar uma moeda para o alto, para que o capitão de cada time decidam na sorte quem começa o jogo.

Ao jogar uma moeda e observar a face voltada para cima, há apenas dois resultados possíveis: **cara** ou **coroa**. A chance de ocorrer cara ou coroa é a mesma. Diz-se, portanto, que a probabilidade de sair cara é a mesma de sair coroa.



© Simon Belcher/Alamy/Glow Images

Fotos: © snehr/123RF



Coroa



Cara

Analise agora outra situação.

Em uma empresa, o encarregado de uma seção decidiu colocar em uma urna o nome de todos os funcionários para sortear quem participaria da comissão da empresa. Quem tem a maior probabilidade de ser sorteado: um homem ou uma mulher?

Para responder a essa questão, é necessário saber o número de funcionários e de funcionárias. Suponha que a seção em que trabalha esse encarregado tenha 25 mulheres e 15 homens. Nesse caso, como você estudará adiante, é mais provável que seja sorteada uma mulher. Entretanto, se o número de homens e mulheres for o mesmo, as chances são iguais. E, se o número de funcionários for maior que o número de funcionárias, é mais provável que um homem seja sorteado.

Em qualquer um dos casos anteriores, o resultado do sorteio não pode ser previsto com certeza; é possível avaliar, apenas, qual resultado tem maiores chances de ocorrer. Não é impossível que um homem seja sorteado se a seção tiver 5 homens e 35 mulheres, só é mais difícil.

A situação de incerteza também ocorre no lançamento de um dado. Ao jogar um dado com as 6 faces numeradas com pontos e observar a face voltada para cima, quais são os resultados prováveis?

Suponha que seja um **dado honesto**. A chance de ocorrer a face com 1 ponto é a mesma de ocorrer a face com 2, que, por sua vez, é a mesma de ocorrer a com 3, 4, 5 ou 6 pontos.

Contextos de lançamento de moedas e dados são imprevisíveis, tais como os contextos que envolvem sorteios.

Refleta sobre o caso em que foram colocadas 10 bolinhas de gude do mesmo tamanho, sendo 6 azuis e 4 vermelhas, dentro de um saco.



© Gjermond Allosi/123RF



Dado honesto

A mesma probabilidade de ocorrência de qualquer uma das faces de um dado. Quando isso não acontece, diz-se que o dado é *viciado*.



© Daniel Beneventi

Extraindo uma bolinha ao acaso, sem olhar, pode-se retirar do saco uma bolinha azul ou uma bolinha vermelha, mas as cores têm chances diferentes de serem sorteadas por haver um número diferente de bolinhas de cada cor.



ASSISTA!

Matemática – Volume 3

Probabilidade

Utilizando assuntos como futebol, previsão meteorológica, jogo de palitinhos e valor do seguro de automóveis, esse vídeo mostra exemplos de onde, como e por que se usa o cálculo de probabilidades.

ATIVIDADE 1 Exercitando probabilidades

1 Em uma classe com 22 meninas e 13 meninos, foi realizado um sorteio. Quem tem a maior probabilidade de ser sorteado: um menino ou uma menina?

2 Em uma classe de EJA, 21 estudantes fazem aniversário no primeiro semestre, e 15, no segundo semestre. Ao sortear um estudante ao acaso, é mais provável que o sorteado seja um aniversariante do 1º ou do 2º semestre?

3 Na empresa de João, o nome de metade dos funcionários começa por vogal; o dos demais, por consoante. Os nomes dos funcionários foram escritos em pequenos papéis e, depois, colocados em uma urna. Ao sortear um papel ao acaso, é mais provável que o nome escrito nele comece por vogal ou por consoante?

4 Considere o lançamento de um dado cúbico (de 6 faces) e a observação da face voltada para cima. Responda o que é mais provável ocorrer:

a) Par ou ímpar?

b) Um número primo ou um número composto?

c) Um número maior ou menor que 3?

5 Em um saco, foram colocadas 4 bolas amarelas e 6 bolas vermelhas. Qual é a cor mais provável de ser retirada ao acaso?

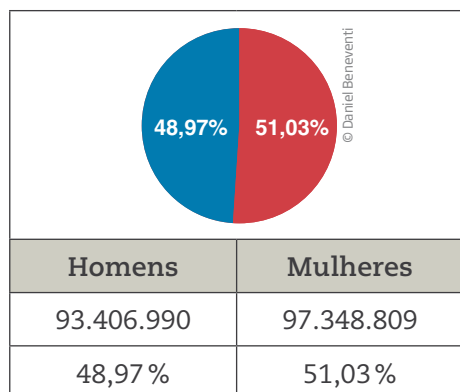
6 Em uma urna, foram colocados envelopes de cores diferentes: 15 cor-de-rosa, 10 azuis e 20 verdes. Ao sortear um envelope ao acaso, qual é a cor que tem mais chance de sair?



Chances iguais

Maria vai ter um bebê. Qual é a probabilidade de nascer uma menina?

O último Censo Demográfico, realizado em 2010 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), indicava que a população brasileira do sexo feminino era maior que a do sexo masculino. Veja a tabela e o gráfico a seguir.



Os números sugerem certo equilíbrio entre homens e mulheres, em torno de 50% para cada sexo.

A diferença de cerca de 2% entre o número de homens e mulheres na população brasileira é atribuída a fatores sociais como violência urbana, acidentes, tabagismo, consumo de bebidas alcoólicas etc., e não às chances de nascimento, que são iguais, ou seja, 50%.

Experimentando e medindo frequências

A probabilidade de ocorrência de um evento pode ser medida e expressa por meio de um número, em geral uma fração ou uma porcentagem.

Para compreender melhor como se pode determinar esse número, costumam-se fazer alguns experimentos, por exemplo, lançar uma moeda para cima e construir uma tabela que indique a quantidade de caras e de coroas obtidas em 10 jogadas.

Quando o número de jogadas é pequeno, não é possível notar um padrão, mas, ao aumentar o número de jogadas para 20, 30, 50 ou 100 vezes, é possível perceber uma tendência. Veja, por exemplo, a tabela a seguir com o registro da ocorrência de caras e coroas:

Quantidade de jogadas	Caras	Coroas
10	3	7
15	8	7
20	11	9
25	12	13
30	14	16
50	22	28
100	52	48

Qual é o número de caras esperado, caso você jogue 1.000 vezes a moeda?

Se tiver a oportunidade de fazer o experimento com moedas honestas, espera-se que a ocorrência de caras e coroas seja próxima de 50% à medida que se aumenta o número de jogadas. O resultado pode variar, como 495 caras e 505 coroas, ou 502 caras e 498 coroas. Não importa qual número é maior, se o de caras ou o de coroas, é bem provável que fique próximo de 500 nos dois casos.



A medida da chance: probabilidade

No caso do lançamento de uma moeda, você já deve ter observado que, se o número de jogadas aumentar, a razão entre o número de caras e o total de lançamentos tende a ficar em torno de $\frac{1}{2}$. Diz-se, então, que a probabilidade de dar cara é de “1 para 2”, ou $\frac{1}{2}$, ou 50%.

O evento “cara” é um dos dois casos prováveis. Simbolicamente, escreve-se:

$$P(\text{cara}) = P(\text{coroa}) = \frac{1}{2}$$

Ou seja: 1 chance em 2 possíveis.

Ao lançar uma moeda para o alto, os únicos resultados prováveis são cara ou coroa. Se der cara, não dá coroa, e vice-versa.

Imagine duas pessoas, João e Maria, que jogam “cara ou coroa” com duas moedas. João apostou que consegue duas coroas, e Maria apostou que obterá duas faces diferentes da moeda. Quem tem mais chances de ganhar a aposta?

Veja os casos possíveis:

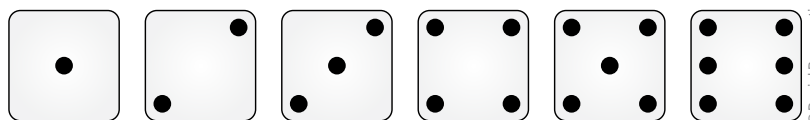
	João	Maria	
Fotos: © snehit/123RF			← 1 cara, 1 coroa: Maria ganha.
			← 2 caras: ninguém ganha.
			← 1 coroa, 1 cara: Maria ganha.
			← 2 coroas: João ganha.

Observe que determinar a chance de ocorrência de um evento depende do fato de saber quais são as possibilidades do evento ocorrer no conjunto de todos os resultados possíveis.

No caso, Maria tinha 2 chances em 4 resultados possíveis, ou seja, ela tinha 50% de chances de ganhar, enquanto João só ganharia em 1 caso entre os 4 resultados possíveis, ou seja, sua chance era de 1 em 4, ou 25%. Assim, a chance de Maria ganhar a aposta era maior.

Probabilidades com dados e sorteios

Agora, você vai aprender a calcular a probabilidade, por exemplo, no lançamento de dados. Como são dados cúbicos, o número de casos possíveis no lançamento de apenas um dado é 6:



A face que representa o número 1 é uma possibilidade entre seis.

Quando se quer se referir à probabilidade de ocorrer um evento E , escreve-se $P(E)$.

Em um total de n ocorrências igualmente prováveis, um evento E pode ocorrer de f maneiras diferentes.

Portanto, a probabilidade de ocorrência do evento E , indicada por $P(E)$, é dada por: $P(E) = \frac{\text{casos favoráveis}}{\text{casos possíveis}} = \frac{f}{n}$, em que $P(E)$ é a probabilidade de ocorrência de um evento E ; f é o número de casos favoráveis à ocorrência do evento; e n é o número de casos possíveis.

Parece complicado, porque a representação se deu por meio de linguagem algébrica. Observe os exemplos a seguir.

As chances de as faces 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 ficarem voltadas para cima são as mesmas; portanto, $P(1) = \frac{1}{6}$ (em porcentagem, essa fração equivale a, aproximadamente, 16,67%).

$$\text{Logo, } P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Utilize essas ideias e a notação $P(E)$ para explorar algumas situações e determinar a probabilidade de sua ocorrência.

Exemplo 1. Se em um saco há 5 bolas azuis e 3 vermelhas, extraindo ao acaso uma bola, tem-se:

Total de bolas: 8

$$P(\text{azuis}) = \frac{\text{quantidade de bolas azuis}}{\text{total de bolas}} = \frac{5}{8} \text{ ou } 62,5\%$$

Para expressar essa probabilidade em porcentagem, basta dividir 5 por 8. Se você fizer a operação na calculadora, no visor aparecerá 0,625, que equivale a 62,5%.

$$P(\text{vermelhas}) = \frac{\text{quantidade de bolas vermelhas}}{\text{total de bolas}} = \frac{3}{8} \text{ ou } 37,5\%$$

3 dividido por 8 é igual a 0,375, que equivale a 37,5%.

$$P(\text{azuis}) + P(\text{vermelhas}) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$62,5\% + 37,5\% = 100\%$$

Exemplo 2. Considere uma empresa com 40 funcionários, metade homens e metade mulheres.

a) Qual é a probabilidade de, em um sorteio, uma mulher ser escolhida para ser representante em uma comissão?

$$\text{Número de mulheres: } \frac{40}{2} = 20$$

$$P(\text{mulher}) = \frac{20}{40} \text{ ou, simplificando, } \frac{1}{2}, \text{ que equivale a } 50\%$$

b) Supondo que cada funcionário esteja associado a um número de 1 a 40, qual é a chance de ser sorteado um funcionário cujo número é ímpar e maior que 25?

São 7 os números ímpares maiores que 25 e menores que 40: {27, 29, 31, 33, 35, 37, 39}.

$$P(\text{ímpares maiores que 25 e menores que 40}) = \frac{7}{40} = 0,175, \text{ que equivale a } 17,5\%$$

c) Em relação ao item b, qual é a chance de ser sorteado um número primo?

Há 12 números primos entre 1 e 40: {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}.

$$P(\text{primo}) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

Observe que $\frac{3}{10}$ é equivalente a $\frac{30}{100}$. Assim, pode-se também expressar a probabilidade por meio de uma porcentagem: há 30% de chance de um número primo ser sorteado.

Exemplo 3. Em um globo, daqueles de sorteio, foram colocadas bolinhas numeradas de 1 a 12, e, depois, uma bolinha foi sorteada ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de sair o número 2? Será que a probabilidade de sair o número 3 é maior que a de sair o número 2?

O 2 é uma de 12 possibilidades; o mesmo acontece com o 3. Isso quer dizer que a probabilidade de sair cada número é a mesma, no caso:

$$P(2) = P(3) = \frac{1}{12}$$

b) E a probabilidade de sair um número primo, qual é?

Para responder a essa questão, é preciso conhecer o universo de possibilidades. Nesse caso, o conjunto de todas as possibilidades é:

{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Para saber qual é a probabilidade de sair um número primo, basta listar quantos são os números primos nas bolinhas: {2, 3, 5, 7, 11}.

Há 5 possibilidades de ocorrência de números primos em 12 casos possíveis:

$$P(\text{primo}) = \frac{5}{12}$$

Conhecendo o número de casos favoráveis e o total de casos, é possível responder a muitas questões sobre probabilidade.

ATIVIDADE 2 Calculando probabilidades

1 Em um saco, foram colocadas 4 bolas amarelas e 6 bolas vermelhas. Calcule a probabilidade de cada cor ser escolhida ao acaso.

2 Em uma urna, foram colocados envelopes de cores diferentes: 15 amarelos, 10 azuis e 20 verdes. Calcule a probabilidade de cada cor ser sorteada.

3 Em uma classe com 20 meninas e 15 meninos, foi realizado um sorteio. Qual é a probabilidade de o sorteado ser um menino? E de ser uma menina?

4 Em um globo, daqueles de sorteio, foram colocadas bolinhas numeradas de 1 a 50. Uma bolinha é sorteada ao acaso. Calcule a probabilidade de ser sorteado um número:

a) par

b) múltiplo de 3

c) múltiplo de 5

d) primo

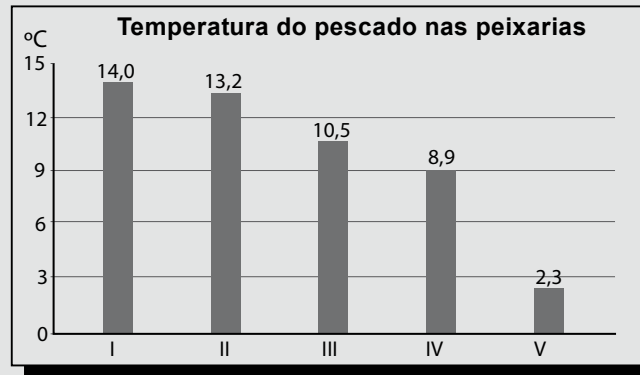
e) maior que 25

5 Em relação ao globo do exercício anterior, há mais chances de ser sorteada uma bolinha que tenha um número primo ou um número múltiplo de 3?



DESAFIO

1



Associação Brasileira de Defesa do Consumidor (com adaptações).

Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C. Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a:

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{4}$
- d) $\frac{1}{5}$
- e) $\frac{1}{6}$

Enem 2007. Prova amarela. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2007/2007_amarela.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.

2 André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

- a) 25%.
- b) 27,5%.
- c) 30%.
- d) 33,3%.
- e) 50%.

Universidade Federal do Paraná (UFPR), 2012. Disponível em: <http://www.nc.ufpr.br/concursos_institucionais/ufpr/ps2012/provas1fase/PS2012_conhecimentos_gerais.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.



O cálculo de probabilidades é usado em quase todos os assuntos e campos da ciência, como Meteorologia e Genética.

Será que é importante conhecer a possibilidade de algum fenômeno acontecer?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Exercitando probabilidades

- 1** $22 > 13$, portanto, é mais provável que uma menina seja sorteada.
- 2** $21 > 15$, portanto, é mais provável que um estudante que faça aniversário no 1º semestre seja sorteado.
- 3** As chances são as mesmas.
- 4**
 - a) São ímpares 1, 3 e 5; são pares 2, 4 e 6. São 3 ocorrências de ímpares e 3 ocorrências de pares; portanto, as chances são iguais.
 - b) São primos 2, 3 e 5; são compostos 4 e 6 (1 não é primo nem composto). São 3 ocorrências de primos e 2 ocorrências de compostos; portanto, há mais probabilidade de sair um número primo.
 - c) Números maiores que 3 são 4, 5 e 6; números menores que 3 são 1 e 2. São 3 ocorrências de números maiores que 3 e 2 ocorrências de números menores que 3; portanto, é mais provável sair um número maior que 3.
- 5** $4 < 6$; portanto, é mais provável sair uma bola vermelha.
- 6** $20 > 15 > 10$; portanto, há mais chance de sair um envelope verde que um envelope cor-de-rosa; o envelope cor-de-rosa, por sua vez, tem mais chance de sair que um envelope azul.

Atividade 2 - Calculando probabilidades

- 1** Total de bolas $\rightarrow 4 + 6 = 10$.

$$P(\text{amarela}) = \frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$$

$$P(\text{vermelha}) = \frac{6}{10} = 0,6 = 60\%$$

- 2** $P(\text{amarelo}) = \frac{15}{45} \approx 0,33 = 33\%$; $P(\text{azul}) = \frac{10}{45} \approx 0,22 = 22\%$;

$$P(\text{verde}) = \frac{20}{45} \approx 0,44 = 44,4\%$$

3 O total de estudantes é $20 + 15 = 35$

$$P(\text{menino}) = \frac{15}{35} \approx 0,429 \approx 42,9\%$$

$$P(\text{menina}) = \frac{20}{35} \approx 0,571 \approx 57,1\%$$

4

a) 25 das 50 bolinhas do globo têm número par.

$$P(\text{par}) = \frac{25}{50} = 0,5 = 50\% \text{ de probabilidade.}$$

b) Os múltiplos de 3 no globo são 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45 e 48, ou seja, 16 casos em 50.

$$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{16}{50} = 0,32 = 32\% \text{ de probabilidade.}$$

c) Há 10 múltiplos de 5 no globo; são eles 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45 e 50.

$$P(\text{múltiplo de 5}) = \frac{10}{50} = 0,20 = 20\% \text{ de probabilidade.}$$

d) As bolinhas do globo que têm números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 e 47, ou seja, 15 casos em 50.

$$P(\text{primo}) = \frac{15}{50} = 0,3 = 30\% \text{ de probabilidade.}$$

e) Há 25 bolinhas com números maiores que 25.

5 $P(> 25) = \frac{25}{50} = \frac{1}{2} = 50\% \text{ de probabilidade.}$

$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{16}{50}$; $P(\text{primo}) = \frac{15}{50}$; como $\frac{16}{50} > \frac{15}{50}$, a probabilidade de sair um múltiplo de 3 é maior, embora os valores sejam próximos.

Desafio

1 Alternativa correta: **d**. Analisando o gráfico, a única peixaria disponível que atende às condições de temperatura é a de número V (2,3 °C); logo, $E = 1$ entre as cinco peixarias pesquisadas. Então,

$$P(E) = \frac{1}{5}$$

2 Alternativa correta: **e**. Chamando de **S** todos os resultados possíveis ao se lançar duas moedas, tem-se:

$$S = \{(cara, cara); (cara, coroa); (coroa, coroa); (coroa, cara)\}$$

O evento **E** é “sair uma cara e uma coroa” para que João lave a louça:

$$E = \{(cara, coroa), (coroa, cara)\}$$

Logo, a probabilidade de João ser sorteado para lavar a louça será de:

$$P(E) = \frac{2}{4} = 50\%$$

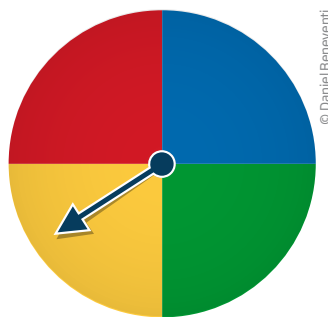
Neste tema, por meio de conceitos geométricos conhecidos e jogos de roleta, você vai aprofundar a aprendizagem das probabilidades.

O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já viu algum filme ou programa de TV em que as pessoas vão a cassinos para jogar na roleta? Na maior parte das vezes, elas ganham ou perdem? Por que será?

Uso da Geometria em Probabilidade

Existem jogos como lançar dardos ao alvo ou fazer girar uma roleta, como a da imagem a seguir, em que, dando um “peteleco” em um ponteiro móvel, ele gira e, depois, para em alguma região.

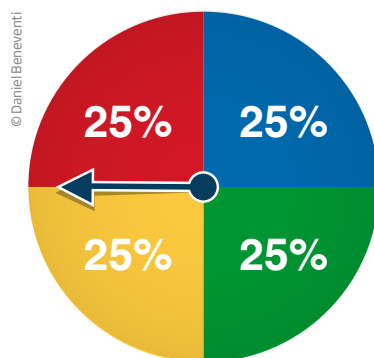


Você vai estudar agora a probabilidade de o ponteiro parar em determinada região da roleta.

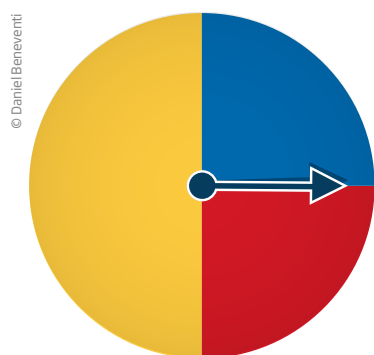
Para movimentar o ponteiro de uma roleta, basta empurrar sua ponta. O que você acha que pode acontecer?

Se a roleta não tiver problema técnico, é de se esperar que, à medida que se aumenta o número de jogadas, exista certo equilíbrio na localização do ponteiro nas quatro regiões (veja a imagem anterior), que têm igual probabilidade de parada do ponteiro.

Como o círculo da roleta é simetricamente distribuído, e cada região ocupa exatos 25% da superfície, deve-se esperar que, para um número alto de jogadas, o ponteiro pare cerca de 25% das vezes em cada região. Assim, pode-se dizer que as chances de o ponteiro da roleta parar na região amarela, vermelha, azul ou verde são iguais, ou seja, 25% para cada cor.



Considere agora esta outra roleta:



Em que região você acha que o ponteiro tem mais chances de parar?

Analise as partes da roleta e tente expressar, em porcentagem, qual é a probabilidade de que o ponteiro pare nas regiões amarela, azul e vermelha.

Se tiver a oportunidade de reproduzir o jogo e repetir a experiência várias vezes, chegará a resultados próximos dos seguintes: região amarela: 50% de probabilidade (pois ocupa metade da superfície da roleta); regiões azul e vermelha: 25% de probabilidade cada uma.

Se você quiser calcular a probabilidade de o ponteiro parar na região vermelha ou na região amarela, basta levar em consideração as duas regiões da imagem: a vermelha, que ocupa $\frac{1}{4}$ da superfície da roleta; e a amarela, que ocupa $\frac{1}{2}$ dela. A probabilidade de o ponteiro parar em qualquer uma dessas duas regiões é de 75%.

LEMBRE!

A cada porcentagem, pode-se associar um número fracionário e vice-versa:

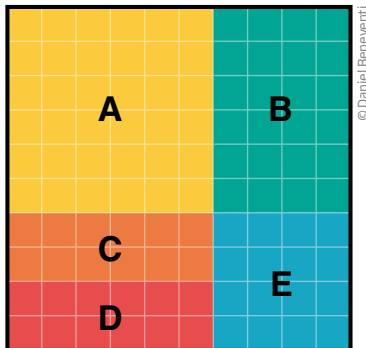
$$50\% = \frac{1}{2}$$

$$25\% = \frac{1}{4}$$

Nesses exemplos, a probabilidade de o ponteiro parar em determinada região é proporcional à área da região.

ATIVIDADE 1 Probabilidade e áreas

1 Imagine um alvo como o da figura a seguir, formado por 5 regiões.

**DICA!**

Calcule antes a área de cada região indicada.

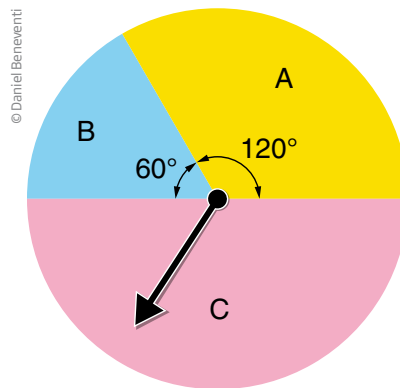
Ao atirar um dardo aleatoriamente no alvo, qual é a probabilidade de o dardo acertar:

- a) a região A?
- b) a região B?
- c) a região C?
- d) a região D?
- e) a região E?
- f) as regiões A ou B?
- g) as regiões C, D ou E?

h) as regiões A, C ou D?

i) as regiões B ou E?

2 Considere a roleta ilustrada a seguir, com um ponteiro preparado para girar livremente.



Após um toque, qual é a probabilidade de o ponteiro parar:

a) na região A?

b) na região B?

c) na região C?

d) nas regiões A ou B?

e) nas regiões A ou C?

f) nas regiões B ou C?

3 O tabuleiro a seguir é formado por 9 regiões.

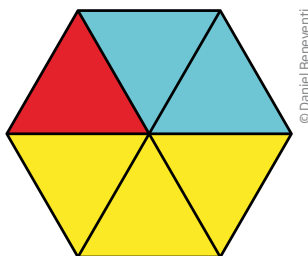


Ao atirar ao acaso uma pedra sobre o tabuleiro:

a) Qual é a região em que a pedra tem maior probabilidade de cair?

b) Quais são as regiões com menor probabilidade de a pedra cair?

4 Um jogo é formado por um tabuleiro em formato hexagonal, como na figura a seguir.



- Na primeira etapa, cada jogador, alternadamente, escolhe uma região (cor).
- Na segunda etapa, jogam um punhado de 100 feijões sobre o tabuleiro.
- Ganha o jogador que tiver o maior número de feijões em cada região escolhida.

a) Qual é a região que tem probabilidade de receber o maior número de feijões?

b) Qual é a região que tem probabilidade de receber o menor número de feijões?



DESAFIO

Uma fábrica produz sucos com os seguintes sabores: uva, pêssego e laranja. Considere uma caixa com 12 garrafas desses sucos, sendo 4 garrafas de cada sabor. Retirando-se, ao acaso, 2 garrafas dessa caixa, a probabilidade de que ambas contenham suco com o mesmo sabor equivale a:

- a) 9,1%
- b) 18,2%
- c) 27,3%
- d) 36,4%

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), 2011. Disponível em: <http://www.vestibular.uerj.br/porta_vestibular_uerj/arquivos/arquivos2011/provas_e_gabaritos/1eq/2011_1eq_ciencias_natureza_mat_tecnologias.pdf>. Acesso em: 30 out. 2014.



VOCÊ SABIA?

A ideia de probabilidade é mais antiga do que se pensa. Estudos sobre culturas da Antiguidade indicam a presença de vários tipos de jogos em povos antigos como os babilônios, os egípcios, os astecas e os vikings.

Mas os primeiros estudos que levaram a uma teoria matemática sobre Probabilidade surgiram no século XVII, com uma troca de correspondências entre os franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), que discutiam sobre determinado problema.

Conta-se que, durante uma viagem pelo interior da França, Pascal encontrou um aficionado por jogos de dados. O jogador queria saber de Pascal como deveria ser dividida certa quantia em dinheiro, caso um jogo, com vários lances programados, tivesse que ser interrompido antes do tempo. Pascal se interessou pelo problema e o desenvolveu com Fermat por meio de troca de correspondência.

De lá para cá, a teoria das probabilidades desenvolveu-se, e hoje é aplicada em praticamente todos os campos do conhecimento científico.

MOMENTO CIDADANIA



Cuidado com os jogos de loteria!

Diariamente você é bombardeado por propagandas de TV com propostas para ficar rico da noite para o dia, sem muito esforço. Essa venda de felicidade fácil, por meio de loterias, concursos e carnês do tipo “aposte e ganhe”, não informa aos telespectadores as reais condições de ganhar o que é ofertado. O fato é que, na maioria das vezes, a chance de ganhar na loteria, ou nesses tipos de sorteio, é quase nula.

Refleta sobre um caso de loteria esportiva: imagine quais são as chances de se acertar o resultado – vitória, empate ou derrota – em um simples jogo de futebol entre locais × visitantes. Só há 3 resultados possíveis: vitória dos locais (portanto, derrota dos visitantes); empate; derrota dos locais (portanto, vitória dos visitantes).

Suponha uma “loteria” em que você só tenha que acertar o resultado entre vitória (1), empate (×) e derrota (2), não importando o placar nem as condições de cada time. Supondo que os times tenham o mesmo desempenho, as chances de qualquer resultado é de $\frac{1}{3}$, ou seja, de 33,33%. Mas, se o número de partidas aumentar, o número de combinações fica maior também. Por exemplo, se forem dois jogos, podem ocorrer os seguintes resultados:

Jogo 1: coluna 1, do meio ou coluna 2 (3 resultados).

Jogo 2: coluna 1, do meio ou coluna 2 (3 resultados).

Se o jogo 1 terminar com a vitória do time local, há 3 combinações possíveis com o jogo 2:

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

Se o jogo 1 terminar empatado, há 3 combinações possíveis com o jogo 2:

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

E, se o jogo 1 terminar com derrota do time local, há 3 combinações possíveis com o jogo 2:

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

	1	×	2
Jogo 1			
Jogo 2			

A combinação dos dois jogos tem $3 \cdot 3 = 9$ resultados possíveis.

Em uma loteria esportiva com 13 jogos, por exemplo, o número de resultados possíveis é:

$$3^{13} = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1.594.323$$

As chances de alguém acertar um resultado que combine os 13 jogos é de $\frac{1}{1.594.323} \approx 0,0000006$. Ou seja, praticamente zero.

Para ter uma ideia, a probabilidade de um indivíduo ganhar sozinho o prêmio da Mega-Sena é de 1 em 50.063.860.

Essa probabilidade é ainda 30 vezes menor que ganhar na loteria esportiva.

Dessa forma, como você já tem noções de probabilidade, agora sabe que tal possibilidade é praticamente nula.

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Probabilidade e áreas

1

a) O quadrado grande tem 100 quadradinhos. A região A tem $6 \cdot 6 = 36$ quadradinhos.

$$P(A) = \frac{36}{100} = 0,36 = 36\% \text{ de chances de o dardo acertar a região A.}$$

b) A região B tem $4 \cdot 6 = 24$ quadradinhos. $P(B) = \frac{24}{100} = 0,24 = 24\%$ de chances de o dardo acertar a região B.

c) A região C tem $2 \cdot 6 = 12$ quadradinhos. $P(C) = \frac{12}{100} = 0,12 = 12\%$ de chances de o dardo acertar a região C.

d) A região D tem o mesmo número de quadradinhos que a região C; $P(C) = P(D) = \frac{12}{100} = 0,12 = 12\%$ de chances de o dardo acertar a região D.

e) A região E tem $4 \cdot 4 = 16$ quadradinhos. $P(E) = \frac{16}{100} = 0,16 = 16\%$ de chances de o dardo acertar a região E.

f) As regiões em questão (A ou B) têm $36 + 24 = 60$ quadradinhos. $P(A \text{ ou } B) = \frac{60}{100} = 0,60 = 60\%$ de chances de o dardo acertar as regiões A ou B.

g) As regiões em questão (C, D ou E) têm $12 + 12 + 16 = 40$ quadradinhos. $P(C, D \text{ ou } E) = \frac{40}{100} = 0,40 = 40\%$ de chances de o dardo acertar as regiões C, D ou E.

h) As regiões em questão (A, C ou D) têm $36 + 12 + 12 = 60$ quadradinhos. $P(A, C \text{ ou } D) = \frac{60}{100} = 0,60 = 60\%$ de chances de o dardo acertar as regiões A, C ou D.

i) As regiões em questão (B ou E) têm $24 + 16 = 40$ quadradinhos. $P(B \text{ ou } E) = \frac{40}{100} = 0,40 = 40\%$ de chances de o dardo acertar as regiões B ou E.

2 A região A (amarela) corresponde a $\frac{1}{3}$ do círculo ($120^\circ = \frac{1}{3}$ de 360°); a região B (azul), a $\frac{1}{6}$ do círculo ($60^\circ = \frac{1}{6}$ de 360°); e a região C (rosa), a $\frac{1}{2}$ do círculo ($180^\circ = \frac{1}{2}$ de 360°).

a) $P(A) = \frac{1}{3} = 0,333... \approx 33,33\%$ de probabilidade de o ponteiro parar na região A.

b) $P(B) = \frac{1}{6} = 0,1666... \approx 16,66\%$ de probabilidade de o ponteiro parar na região B.

c) $P(C) = 0,50 = 50\%$ de probabilidade de o ponteiro parar na região C.

d) $P(A \text{ ou } B) = 0,50 = 50\%$ de probabilidade de o ponteiro parar nas regiões A ou B.

e) $P(A \text{ ou } C) = P(A) + P(C) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = 0,8333... \approx 83,33\%$ de probabilidade de o ponteiro parar nas regiões A ou C.

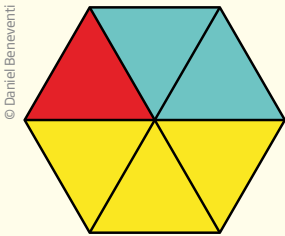
f) $P(B \text{ ou } C) = P(B) + P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,666 \approx 66,66\%$ de probabilidade de o ponteiro parar nas regiões B ou C.

3

a) Na região de maior área: 5.

b) Nas regiões de menor área: 1, 3, 7 ou 9. As regiões 1, 3, 7 e 9; 4 e 6; 2 e 8 têm, entre si, a mesma probabilidade de receber a pedra.

4



a) A região que tem probabilidade de receber o maior número de feijões é a que tem a maior área (amarela).

b) A região que tem probabilidade de receber o menor número de feijões é a que tem a menor área (vermelha).

Desafio

Alternativa correta: c. Seja S o espaço amostral, então $S = 12$ garrafas.

Pegar da caixa garrafas de sucos de mesmo sabor significa retirar: 1ª garrafa de suco de uva e 2ª garrafa de suco de uva; 1ª garrafa de suco de pêsego e 2ª garrafa de suco de pêsego; ou 1ª garrafa de suco de laranja e 2ª garrafa de suco de laranja. Portanto:

$$P(1^{\text{a}} \text{ e } 2^{\text{a}} \text{ garrafas de sucos de mesmo sabor}) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \quad (1^{\text{a}} \text{ retirada: 4 garrafas de uva entre 12;}$$

2ª retirada: sobraram 3 garrafas de uva entre 11, já que não há reposição na caixa)

Com os outros sabores ocorre a mesma probabilidade, já que o número de garrafas de cada sabor é o mesmo (4). Então, basta multiplicar por 3:

$$\frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot 3 = \frac{36}{132} \text{ ou } 27,27\% \approx 27,3\%$$



Registro de dúvidas e comentários

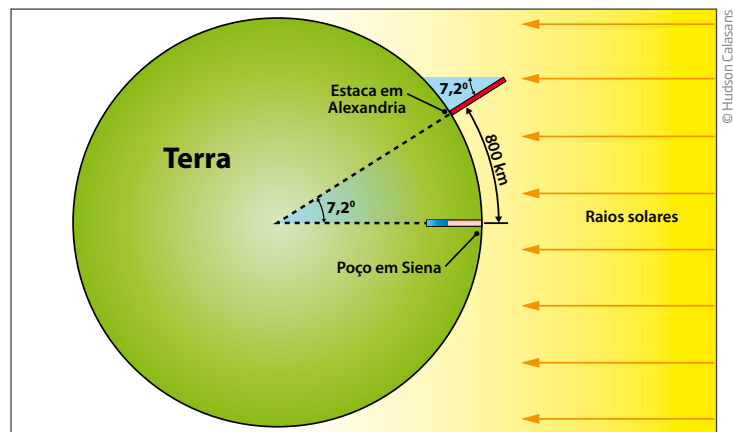
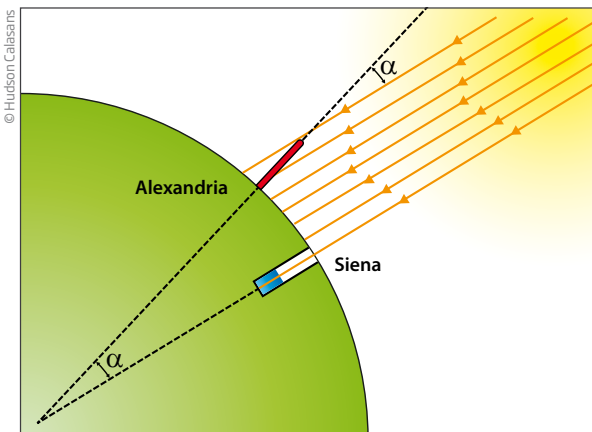
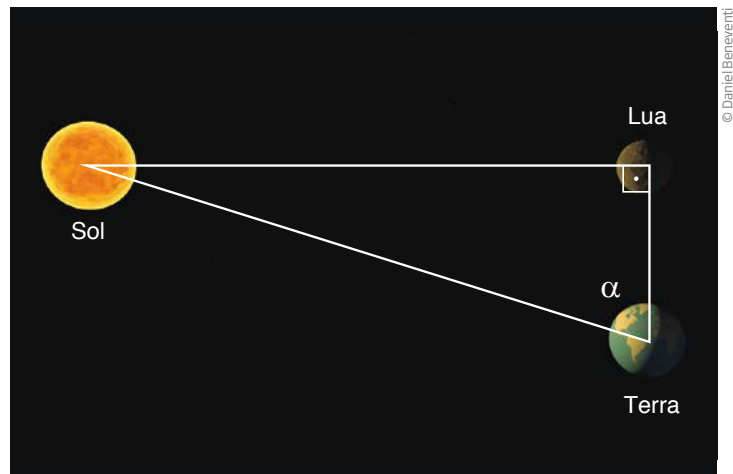
TEMAS

1. Trigonometria do triângulo retângulo
2. Relações no ciclo trigonométrico

Introdução

Desde a Antiguidade, astrônomos e geômetras estudam as propriedades dos triângulos para resolver problemas, sobretudo os que possibilitam determinar medidas inacessíveis, por exemplo, a medida do raio da Terra, a distância da Terra à Lua, a largura de um rio ou a altura de uma montanha.

A base para esses estudos foi a semelhança de triângulos, cujo desenvolvimento levou à criação de uma área da Matemática chamada **Trigonometria**.



Representações fora de escala. Cores-fantasia.

Neste tema, serão abordados assuntos relativos aos triângulos retângulos, às semelhanças que há entre eles, às relações entre ângulos e seus lados e será retomado o Teorema de Pitágoras.

? O QUE VOCÊ JÁ SABE?

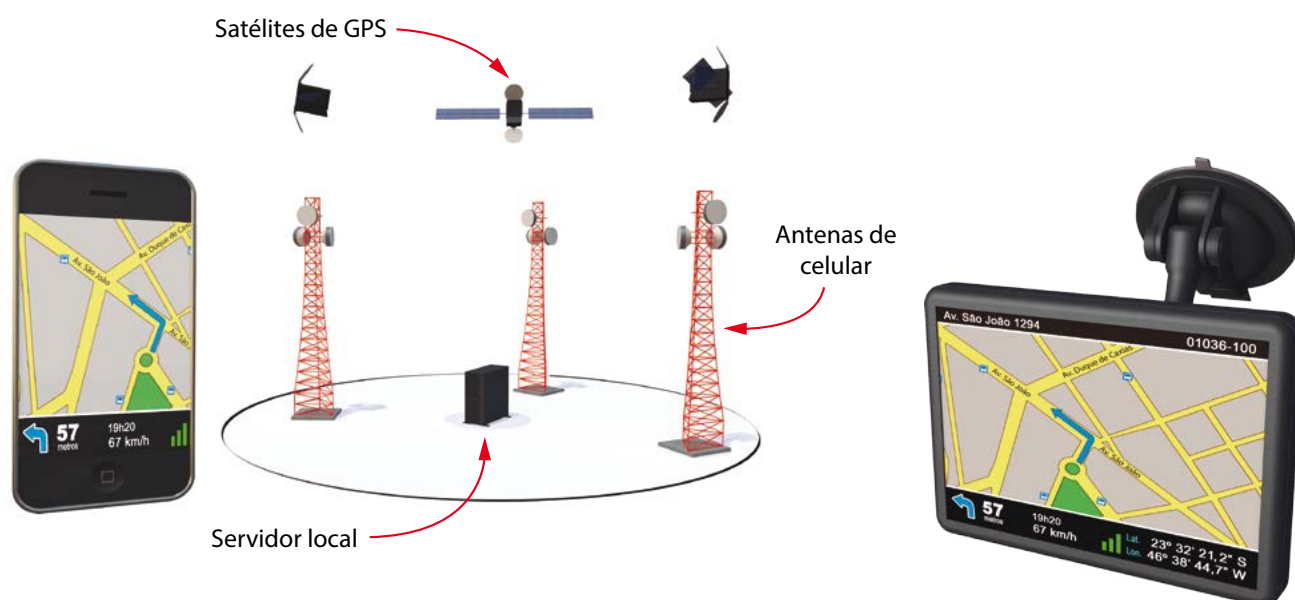
Repare nas escadas que você vê no dia a dia. Você percebe que uma escada, o solo e a parede próximos a ela formam um triângulo retângulo? Os ângulos internos desse triângulo permitem determinar o comprimento da escada. Você sabe como?



Da semelhança de triângulos à Trigonometria do triângulo retângulo

Atualmente, os problemas de medições indiretas, ou seja, aquelas que possibilitam determinar distâncias inacessíveis, são resolvidos com tecnologia de ponta, como nos sistemas de GPS, controlados por computadores e conectados em satélites e instrumentos de precisão, como os teodolitos utilizados por topógrafos e agrimensores.

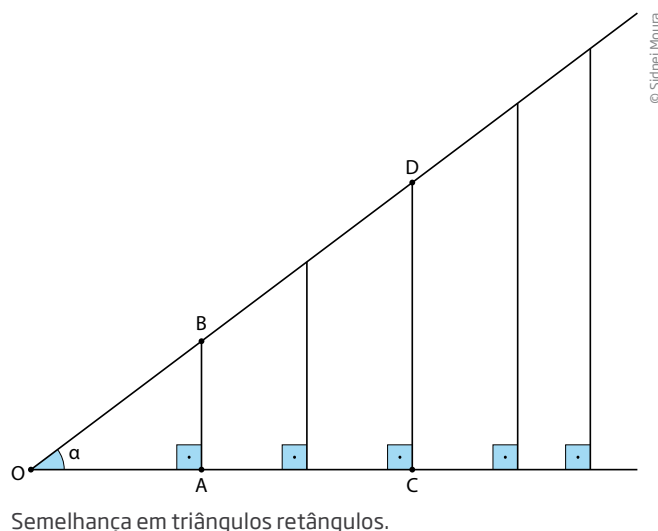
© Daniel Beneventi



© Daniel Beneventi

Entretanto, o princípio utilizado na programação desses computadores é o mesmo desenvolvido pelos gregos há mais de dois milênios, com base na **semelhança de triângulos** e na **Trigonometria**.

Veja como isso funciona analisando os triângulos retângulos na figura a seguir:



Nessa figura, pode-se observar vários triângulos retângulos que são semelhantes, em especial os triângulos OAB e OCD. O que esses triângulos têm em comum são os ângulos internos: o ângulo reto; o ângulo α , que é comum; e o terceiro ângulo, que, para complementar 180° , tem que medir $90^\circ - \alpha$. Por exemplo: se $\alpha = 30^\circ$, o terceiro ângulo mede 60° .

Uma vez que são triângulos semelhantes, a razão entre seus lados correspondentes é constante. Pode-se considerar, por exemplo, a seguinte relação entre os catetos, tendo como referência o ângulo α :

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \rightarrow \frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC}$$

Partindo dessa mesma figura, podem ser observadas outras razões:

$$\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \frac{AB}{OB} = \frac{CD}{OD}$$

$$\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

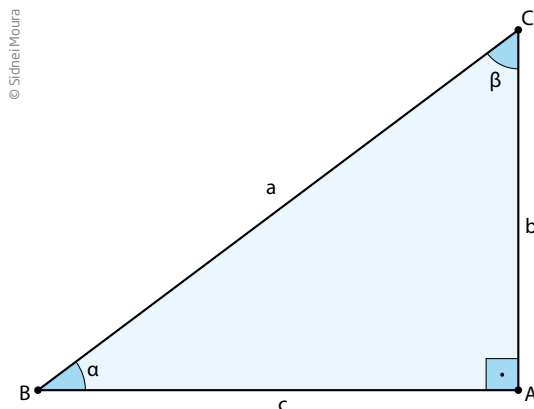
Observe que as medidas dos lados (catetos e hipotenusa) variam; o que não varia é o ângulo formado pelos lados OA e OB e pelos lados OC e OD. É esse ângulo α que determina o valor das razões acima.

Diz-se que as razões entre catetos e hipotenusa ou entre os dois catetos é uma função do ângulo α . Os matemáticos denominaram essas funções de **funções trigonométricas**, das quais as principais são as funções **seno**, **cosseno** e **tangente** de um ângulo.



Senos e cossenos de um ângulo

Para entender essas relações, considere o triângulo ABC a seguir.



Os vértices de um polígono são representados por uma letra maiúscula. Quando essa letra recebe um acento circunflexo, ela passa a se referir ao ângulo do vértice.

Nele, o seno é determinado por:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{b}{a} \text{ e } \text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a} \quad (\text{I})$$

E o cosseno por:

$$\text{cos } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \rightarrow \text{cos } \hat{B} = \frac{c}{a} \text{ e } \text{cos } \hat{C} = \frac{b}{a} \quad (\text{II})$$

Sobre essas relações, cabem algumas considerações importantes. Como se trata de um triângulo retângulo, a soma dos ângulos é:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

Mas o ângulo \hat{A} é reto, portanto:

$$90^\circ + \alpha + \beta = 180^\circ$$

Conclui-se que $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Quando a soma de dois ângulos é um ângulo reto, eles são chamados **ângulos complementares**, como no caso de 30° e 60° ou de 72° e 18° .

$$\text{sen } x = \text{cos } (90^\circ - x)$$

$$\text{cos } x = \text{sen } (90^\circ - x)$$

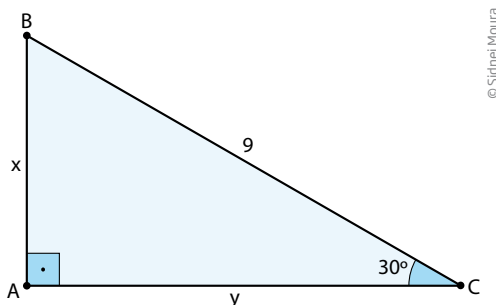
Agora, volte e compare as razões indicadas em (I) e (II) relacionadas ao triângulo ABC. Veja que:

$$\text{sen } \hat{B} = \text{cos } \hat{C}$$

$$\text{sen } \hat{C} = \text{cos } \hat{B}$$

Essas relações foram utilizadas pelos geômetras para determinar medidas de triângulos retângulos com base apenas na informação sobre a medida de um lado e de um ângulo.

Na figura a seguir, a hipotenusa mede 9 cm e o ângulo \hat{C} mede 30° . Conhecidas essas medidas, pode-se determinar as medidas dos catetos x e y . Como isso é possível?



Os geômetras construíram tabelas de razões de senos, cossenos e tangentes com base em medidas. Um exemplo delas é:

Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
30°	0,5	0,86603	0,57735
31°	0,51504	0,85717	0,60086
32°	0,52992	0,84805	0,62487
33°	0,54464	0,83867	0,64941
34°	0,55919	0,82904	0,67451
35°	0,57358	0,81915	0,70021
36°	0,58779	0,80902	0,72654
37°	0,60182	0,79864	0,75355
38°	0,61566	0,78801	0,78129
39°	0,62932	0,77715	0,80978
40°	0,64279	0,76604	0,8391
41°	0,65606	0,75471	0,86929
42°	0,66913	0,74315	0,9004
43°	0,682	0,73135	0,93252
44°	0,69466	0,71934	0,96569
45°	0,70711	0,70711	1
46°	0,71934	0,69466	1,03553
47°	0,73135	0,682	1,07237
48°	0,74315	0,66913	1,11061
49°	0,75471	0,65606	1,15037
50°	0,76604	0,64279	1,19175

Adiante, você conhecerá outras tabelas com valores para cossenos e também para a razão entre os catetos. Por enquanto, pode ver na tabela agora apresentada que: $\text{sen } 30^\circ = 0,5$ e $\text{cos } 30^\circ = 0,866$.

Pela definição de seno $\left(\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}\right)$, tem-se:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{9} = 0,5 \Rightarrow x = 9 \cdot (0,5) = 4,5 \text{ cm}$$

Pela definição de cosseno $\left(\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}\right)$:

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{y}{9} = 0,866 \Rightarrow y = 9 \cdot (0,866) = 7,794 \text{ cm}$$



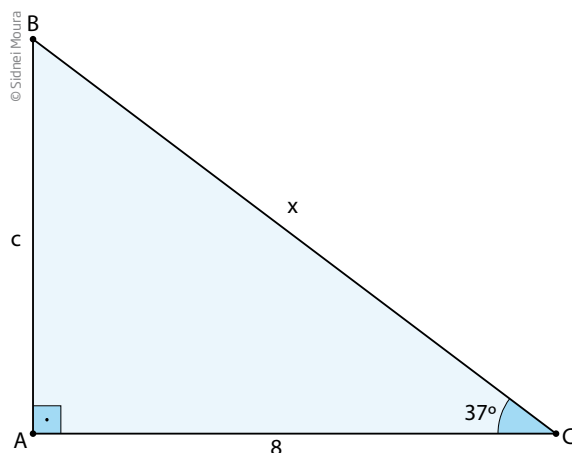
Tangente de um ângulo

Outra função muito utilizada é a função tangente, definida como a razão entre os catetos oposto e adjacente.

$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Na figura em que se demonstrava a *semelhança em triângulos retângulos* (p. 129), você viu que $\frac{AB}{OA} = \frac{CD}{OC}$

Acompanhe agora a utilização dessa relação para determinar a medida da hipotenusa no triângulo a seguir.



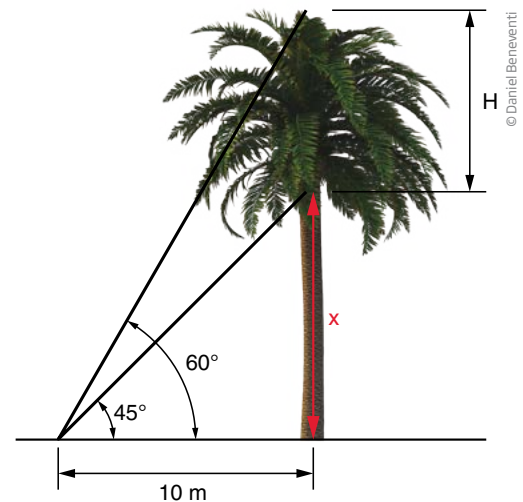
Consultando a tabela anteriormente apresentada com as razões de senos, cossenos e tangentes, vê-se que $\text{tg } 37^\circ = 0,75$. Portanto:

$$\text{tg } 37^\circ = \frac{c}{8} = 0,75 \Rightarrow c = 8 \cdot (0,75) = 6 \text{ cm}$$

Veja um exemplo de aplicação desse conceito.

Um botânico interessado em descobrir o comprimento da copa de uma árvore fez as observações indicadas na figura ao lado a partir de um ponto no solo.

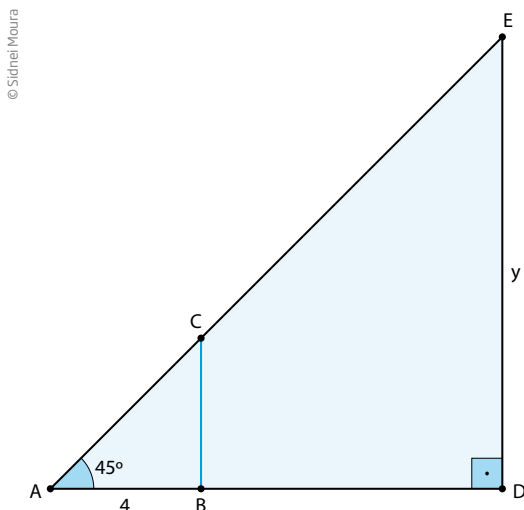
Para determinar o comprimento H , ele considerou a altura do solo até o início da copa da árvore como sendo x . Portanto, a altura total da árvore seria $x + H$. Sabendo-se que $\text{tg } 45^\circ = 1$ e $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ e considerando $\sqrt{3} = 1,7$, bastou aplicar a razão trigonométrica da tangente para descobrir que a altura da copa era 7 m.



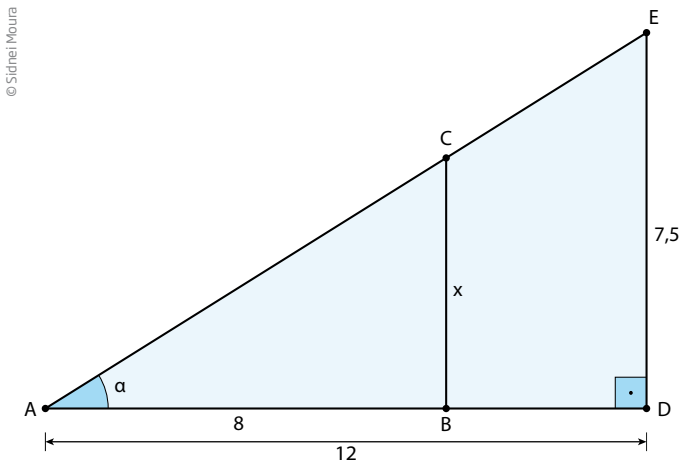
$$\begin{cases} \text{tg } 45^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow 1 = \frac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \text{ m} \Rightarrow (\text{isósceles}) \\ \text{tg } 60^\circ = \frac{10 + H}{10} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{10 + H}{10} \Rightarrow H + 10 = 10\sqrt{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow H \cong 10(1,7) - 10 \cong 17 - 10 \cong 7 \text{ m} \end{cases}$$

ATIVIDADE 1 Resolução de triângulos

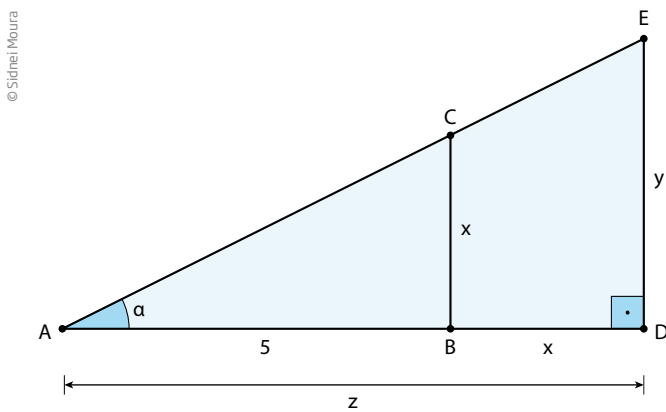
1 Observe a figura. Sabendo que a medida $AB = 4$ cm, $BC \parallel DE$ e $BD = 6$ cm, determine o valor de y .



2 Os triângulos ABC e ADE, a seguir, são semelhantes. Considerando $AB = 8$ cm, $AD = 12$ cm e $DE = 7,5$ cm, determine a medida x .

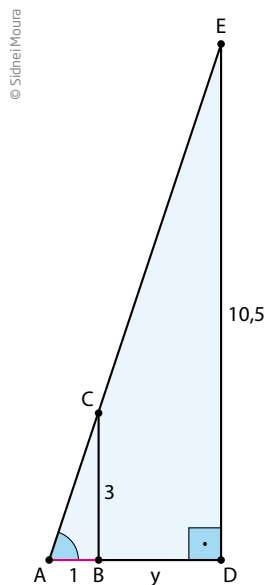


3 Na figura a seguir, $BC = BD = x$, $AD = z$ e $DE = y$. A expressão da medida do cateto DE é:

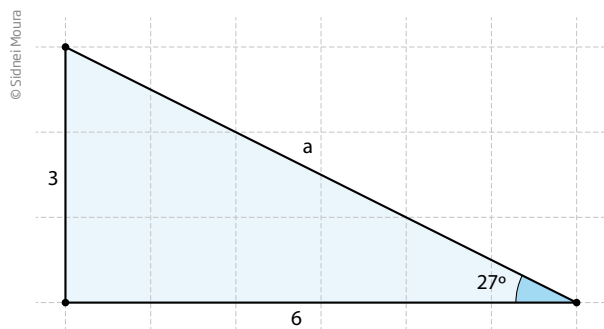


- a) $y = \frac{5 + x}{5}$
- b) $y = \frac{5 + x}{z}$
- c) $y = \frac{x + 5x^2}{5}$
- d) $y = \frac{5x + x^2}{5}$
- e) $y = \frac{5}{5 + x}$

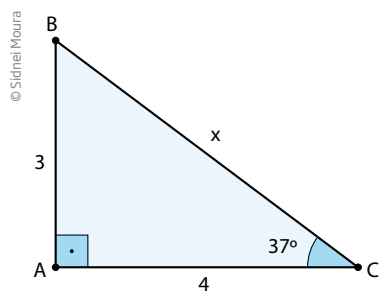
4 Na figura a seguir, $BC \parallel DE$. Determine o valor de $BD = y$.



5 Observando a figura, determine o valor da $\text{tg } 27^\circ$.



6 Com base na figura apresentada a seguir, determine o valor do seno, do cosseno e da tangente de 37° .



7 Os catetos de um triângulo retângulo medem 8 cm e 15 cm. Determine o valor do seno de cada ângulo agudo desse triângulo. Caso sinta necessidade, desenhe o triângulo retângulo antes de fazer os cálculos.

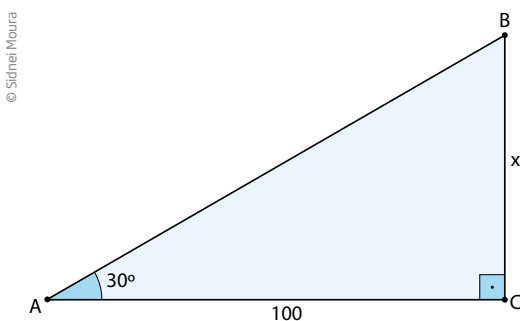
8 Nos itens a seguir, **b** e **c** representam os catetos de triângulos retângulos. Determine o seno do menor ângulo agudo de cada triângulo. Caso sinta necessidade, desenhe os triângulos retângulos antes de fazer os cálculos.

a) $b = 12$ cm e $c = 5$ cm

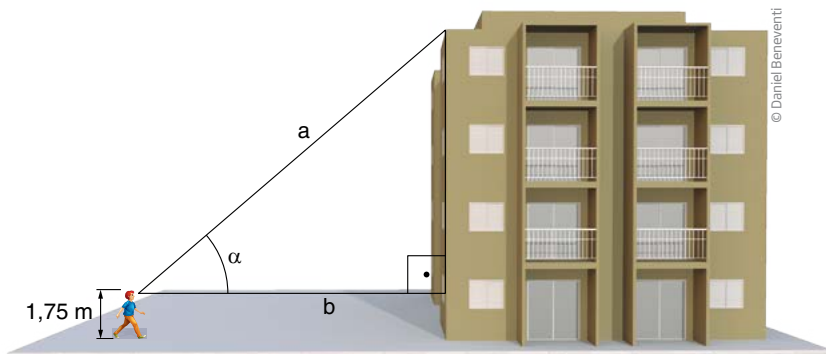
b) $b = 24$ cm e $c = 7$ cm

c) $b = 12$ cm e $c = 16$ cm

9 Determine o valor de **x** no triângulo a seguir.



10 Um homem de 1,75 m de altura observa o topo de um edifício conforme o esquema a seguir. Seus olhos estão 10 cm abaixo do topo de sua cabeça e ele pode caminhar em direção ao prédio e determinar a distância b . A altura do prédio é:



- a) $1,65 + b \cos \alpha$
 b) $1,75 + b \cos \alpha$
 c) $1,65 + a \operatorname{tg} \alpha$
 d) $b \operatorname{tg} \alpha + 1,65$
 e) $1,75 + b \operatorname{tg} \alpha$

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Resolução de triângulos

1 Os triângulos ABC e ADE são semelhantes; os ângulos \widehat{DEA} e \widehat{BCA} medem 45° . Logo, $AB = BC = 4$ cm, pois os triângulos são isósceles e retângulos.

$$y = DE; \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}; AD = AB + BD; \frac{4}{4} = \frac{4 + 6}{y} \Rightarrow y = 10$$

$$\mathbf{2} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{12}{7,5} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 7,5}{12} = 5 \text{ cm}$$

3 Alternativa correta: d.

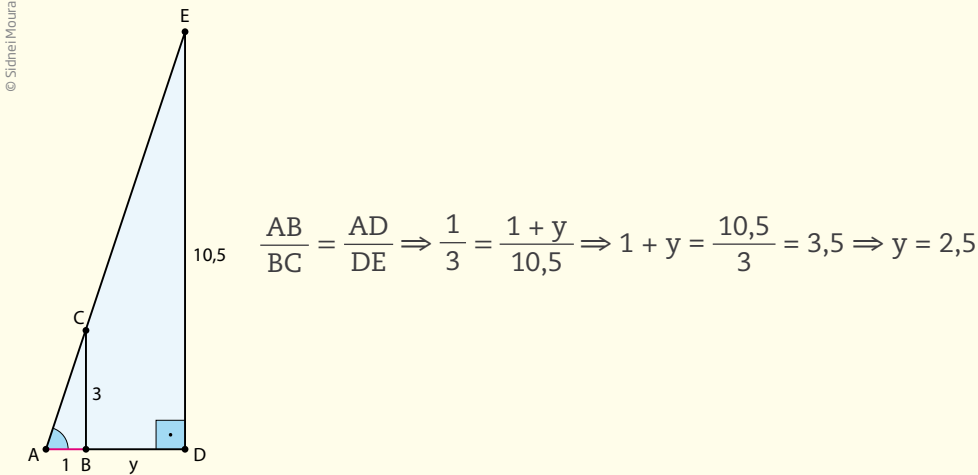
© Sidnei Moura

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE}, \text{ mas } AB = 5, BC = x, DE = y \text{ e } AD = AB + BD = z = 5 + x$$

$$\frac{5}{x} = \frac{5 + x}{y} \Rightarrow 5y = x(5 + x) = 5x + x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5x + x^2}{5}$$

4



5 $\text{tg} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Rightarrow \text{tg } 27^\circ = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

6 Aplicando o teorema de Pitágoras, o valor da hipotenusa é:

$$3^2 + 4^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{sen } 37^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\text{cos } 37^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5} = 0,8$$

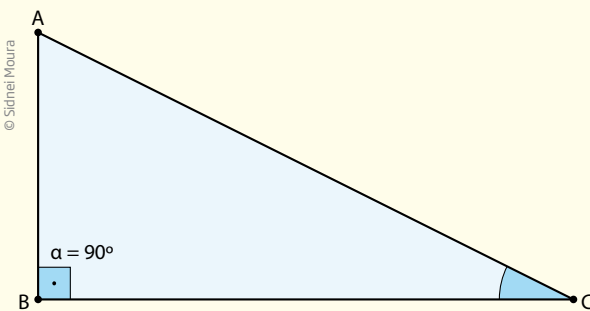
$$\text{tg } 37^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

Observe que $(0,6)^2 + (0,8)^2 = 0,36 + 0,64 = 1$ (adiante você conhecerá a relação $\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$).

7 Aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se $8^2 + 15^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow a = \sqrt{289} = 17$

Logo, $\text{sen } \alpha = \frac{8}{17} \approx 0,47$, $\text{sen } \beta = \frac{15}{17} \approx 0,88$.

8 Em todos os casos, aplica-se o teorema de Pitágoras para determinar o valor da hipotenusa; o menor ângulo agudo é o oposto ao menor cateto.



a) $12^2 + 5^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 25 = 169 \Rightarrow a = \sqrt{169} = 13$

$$\text{sen } \alpha = \frac{5}{13} \approx 0,38$$

b) $24^2 + 7^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 576 + 49 = 625 \Rightarrow a = \sqrt{625} = 25$

$$\text{sen } \alpha = \frac{7}{25} = 0,28$$

c) $12^2 + 16^2 = a^2 \Rightarrow a^2 = 144 + 256 = 400 \Rightarrow a = \sqrt{400} = 20$

$$\text{sen } \alpha = \frac{12}{20} = 0,6$$

Neste tema, os conhecimentos adquiridos sobre seno, cosseno e tangente serão ampliados e vistos de outra perspectiva.

? O QUE VOCÊ JÁ SABE?

Você já reparou que os ponteiros do relógio passam várias vezes pelos mesmos números e marcam ora o horário da manhã, ora o horário da noite?

Será que ciclos como esses, com eventos que se repetem inúmeras vezes, estão relacionados com Trigonometria?

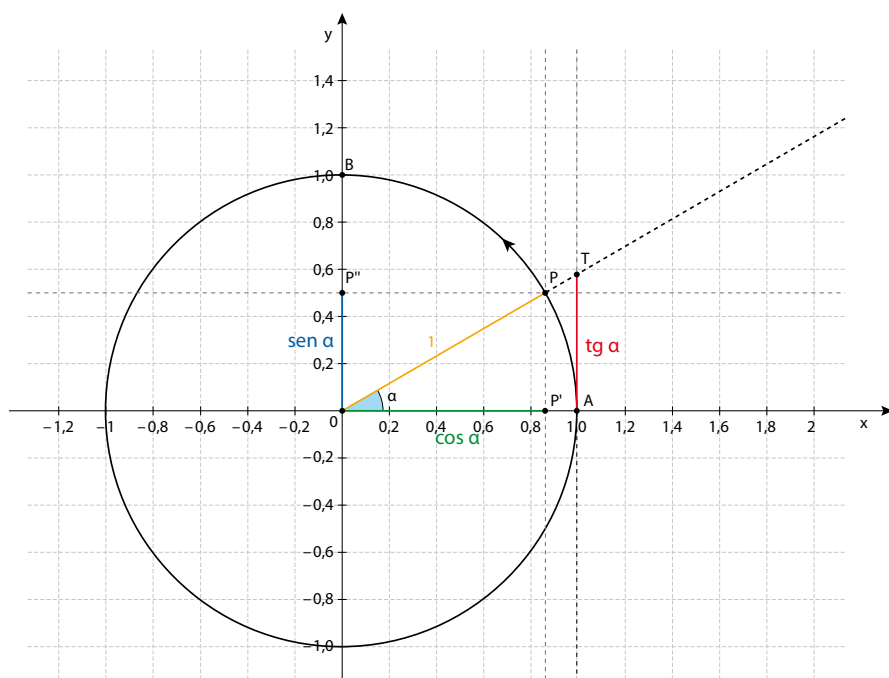
📖 Ciclo trigonométrico

Imagine uma circunferência de raio igual a 1, orientada no sentido anti-horário, e dois eixos perpendiculares que passam pelo centro da circunferência e pelos pontos A e B.

O eixo horizontal que passa por O e A (como o eixo das abscissas que você estudou em funções e Geometria Analítica) será chamado de eixo dos cossenos, e o eixo vertical que passa por O e B (estudado como eixo das ordenadas) será chamado de eixo dos senos (você entenderá melhor essa nomenclatura a seguir). Esses dois eixos definem 4 quadrantes, contados no sentido anti-horário a partir do ponto A.

Considere agora um ponto P da circunferência; o segmento \overline{OP} define com o eixo dos cossenos um ângulo α .

Qualquer ponto do 1º quadrante determina um ângulo entre 0° e 90° ; se o ponto está no 2º quadrante, ele é maior que 90° e menor que 180° . Chama-se esse sistema de eixos e circunferência orientada de **ciclo trigonométrico**.



Ciclo trigonométrico.

No ciclo trigonométrico representado, o ponto P no 1º quadrante determina o ângulo $\alpha = 30^\circ$. Observe na figura que os pontos O, P e P' definem um triângulo retângulo cuja hipotenusa mede 1.

Considerando as definições de seno e cosseno:

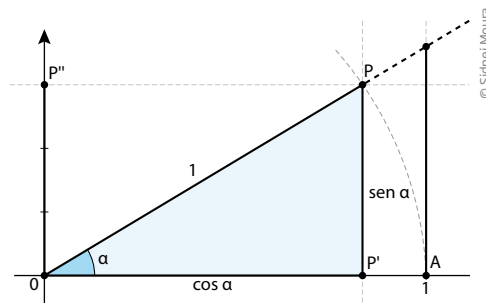
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{PP'}{OP} = \frac{PP'}{1} = PP'$$

O seno do ângulo α é a medida do segmento $\overline{PP'}$.

Veja que $\overline{PP'} = \overline{OP''}$ (no eixo vertical).

$$\operatorname{cos} \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{OP'}{OP} = \frac{OP'}{1} = OP'$$

O cosseno do ângulo α é a medida do segmento OP' (no eixo horizontal):



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo OPP', tem-se que:

$$(\operatorname{sen} x)^2 + (\operatorname{cos} x)^2 = 1^2$$

IMPORTANTE!

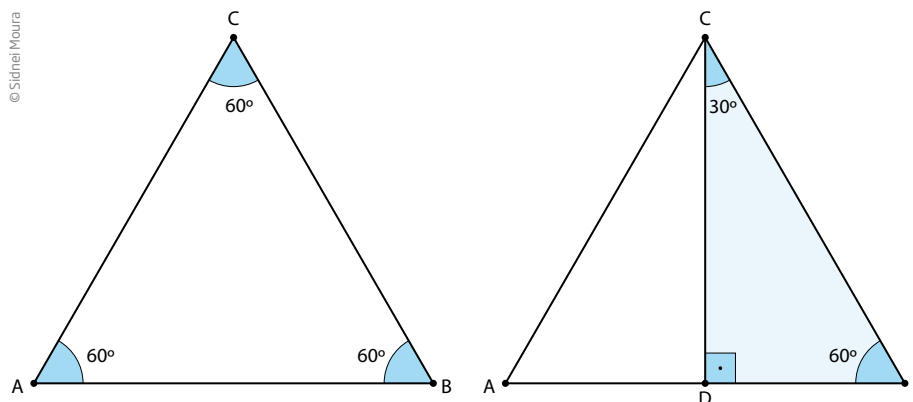
Em livros didáticos e provas de vestibular, essa relação pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

Isso quer dizer que, conhecendo-se o valor do seno de um ângulo (ou arco), é possível calcular o valor do cosseno desse mesmo ângulo (e vice-versa). Como exemplo, acompanhe o cálculo do seno e do cosseno dos ângulos 30° , 45° e 60° , chamados de **ângulos notáveis**.

Primeiro, você vai calcular o seno e o cosseno de 30° e 60° .

O triângulo equilátero tem todos os lados e ângulos com mesma medida (veja o triângulo ABC representado a seguir). Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , cada ângulo do triângulo equilátero mede 60° ($180^\circ \div 3$).



Observe que a altura DC (perpendicular à base \overline{AB}) divide o segmento \overline{AB} em duas partes iguais. Isso quer dizer que $AD = DB$.

O segmento \overline{DC} também bissecta o ângulo $\hat{A}CB$, ou seja, divide-o em dois ângulos iguais. Assim, o ângulo $\hat{D}CB$ mede 30° ($60^\circ \div 2$).

O triângulo DCB é a figura que se procurava, cujos ângulos internos medem 30° , 60° e 90° .

Considere que os lados do triângulo equilátero ABC medem 1. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo DCB, tem-se:

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2$$

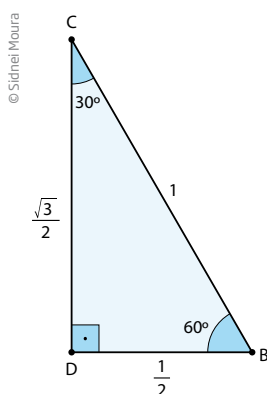
$$h^2 + \frac{1}{4} = 1$$

$$h^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Agora, você pode usar o que sabe sobre seno e cosseno para encontrar os valores de $\text{sen } 30^\circ$, $\text{cos } 30^\circ$, $\text{sen } 60^\circ$ e $\text{cos } 60^\circ$.



$$\text{sen } 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{DB}{BC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{cos } 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CD}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

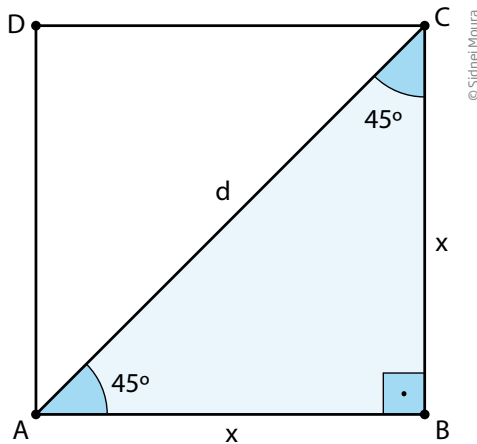
$$\text{sen } 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{CD}{BC} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{cos } 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{DB}{BC} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Agora falta calcular o seno e o cosseno do outro ângulo notável: 45° . Para isso é preciso explorar uma figura geométrica conhecida na qual ele aparece: o quadrado.

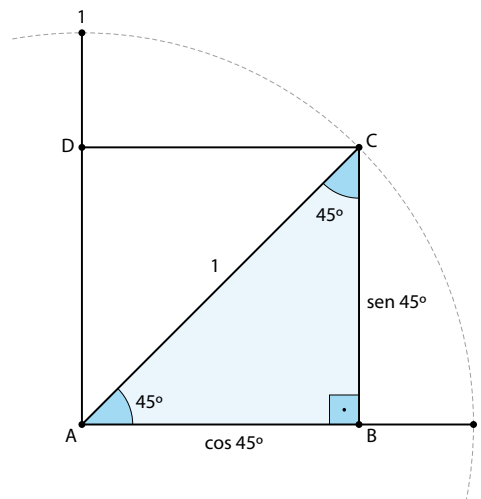
Observe o quadrado ABCD. A diagonal d e os lados x determinam triângulos retângulos isósceles, como o triângulo ABC, com um ângulo reto em B e os ângulos $\hat{A} = \hat{C} = 45^\circ$.

Aplicando o teorema de Pitágoras, obtém-se uma relação entre a diagonal e as medidas dos lados: $d^2 = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}$



$$x^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{\sqrt{d^2}}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}$$

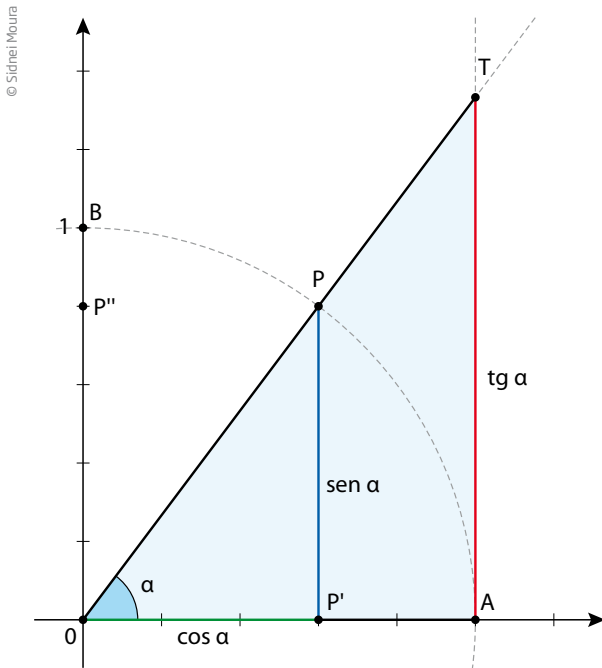
No ciclo trigonométrico, a diagonal mede 1 (raio da circunferência) e os lados $AB = \cos 45^\circ$ e $BC = \sin 45^\circ$.



Como $x = \frac{d \cdot \sqrt{2}}{2}$ e $d = 1$, então se conclui que: $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$.

(Note que 0,71 é uma aproximação do valor 0,70711, que aparece na tabela com as razões de senos, cossenos e tangentes apresentada no Tema 1.)

Por fim, você descobrirá mais uma relação fundamental partindo da definição da tangente de um ângulo no triângulo retângulo.



No ciclo trigonométrico, o eixo das tangentes é o eixo perpendicular ao segmento \overline{OA} (eixo dos cossenos) pelo ponto A.

A tangente é definida como a medida do segmento \overline{AT} , sendo que o ponto T é a intersecção do eixo das tangentes com a reta que passa por O e P.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AT}{OA}$$

No entanto, os triângulos OPP' e OTA são semelhantes, portanto seus lados são proporcionais:

$$\frac{PP'}{OP'} = \frac{AT}{OA} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Pode-se agora calcular a tangente dos ângulos 30° e 60° :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$



ASSISTA!

Matemática – Volume 3

Introdução à Trigonometria

Em um passeio por um parque de diversões, a personagem desse vídeo retoma conceitos importantes, como ângulos e lados de um triângulo, e mostra como eles estão relacionados com a Trigonometria.

ATIVIDADE 1 Relações trigonométricas

1 Observe o ciclo trigonométrico apresentado no início deste tema e determine os valores dos senos, cossenos e tangentes a seguir.

a) $\text{sen } 0^\circ$

b) $\text{cos } 0^\circ$

c) $\text{tg } 0^\circ$

d) $\text{sen } 90^\circ$

e) $\text{cos } 90^\circ$

2 Indique as alternativas corretas sobre a tangente de 90° .

a) Não existe porque, se o ângulo é 90° , a reta OP coincide com o eixo dos senos e nunca interceptará o eixo das tangentes, pois as duas retas são paralelas.

b) Se o ângulo é igual a 90° , $\text{sen } 90^\circ = 1$ e $\text{cos } 90^\circ = 0$. Como a tangente é $\frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$, a razão é $\frac{1}{0}$, que não é definida, pois não é permitida a divisão por zero.

c) Em um triângulo, não pode haver dois ângulos retos.

3 Sabendo que $\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ$, determine o valor da $\text{tg } 45^\circ$.

4 Sabendo que $\text{sen } x = 0,6$, determine o valor de $\text{cos } x$ e $\text{tg } x$.

DICA!

Para esse exercício, use as duas relações fundamentais:

$$\text{sen } x^2 + \text{cos } x^2 = 1 \text{ e } \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x}$$

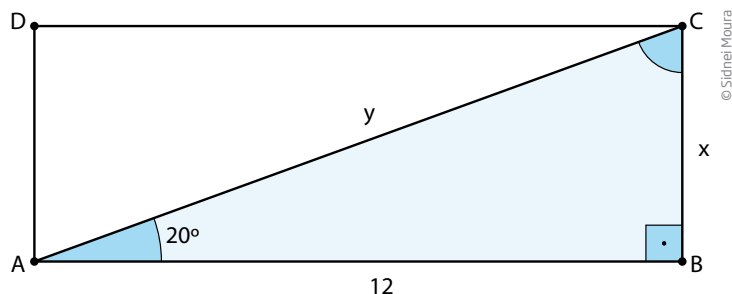
5 Qual é o ângulo em que os valores de seno e cosseno são iguais? Explique sua resposta.

6 Sabendo que a é um ângulo do 1º quadrante e que $\cos a = \frac{1}{4}$:

a) determine o valor de $\sin a$;

b) calcule $\operatorname{tg} a$.

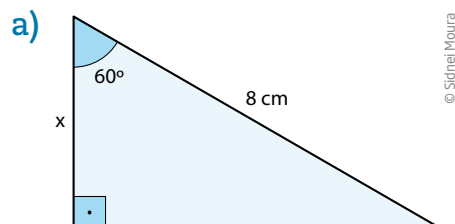
7 Use as relações trigonométricas para encontrar as medidas do lado menor e da diagonal do retângulo cujo cateto maior mede 12 cm, sabendo que $\sin 20^\circ = 0,34$.

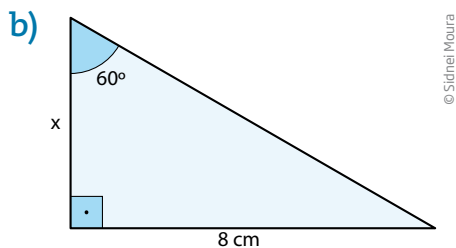


8 Determine a medida de x em cada caso. Use as seguintes aproximações:
 $\sin 30^\circ = 0,5$ e $\sin 60^\circ = 0,87$.

LEMBRE!

Se $\alpha + \beta = 90^\circ$ (ângulos complementares),
então $\sin \alpha = \cos \beta$.



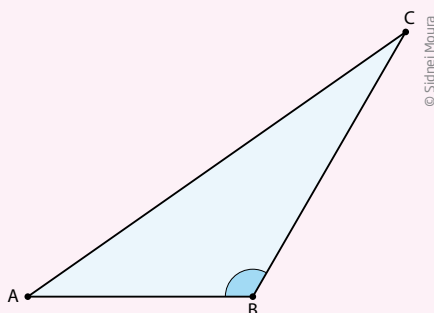


PARA SABER MAIS

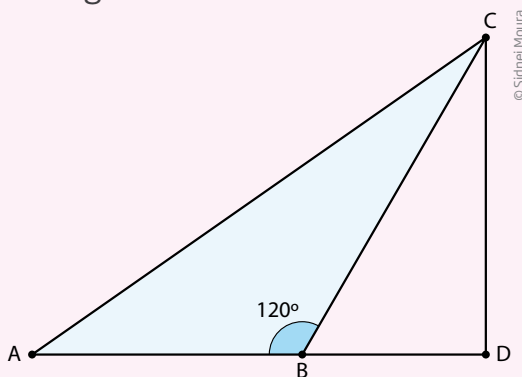


Lei dos senos e lei dos cossenos

Há problemas que envolvem ângulos maiores que 90° , como no caso de um triângulo obtusângulo.



Mas há métodos que possibilitam resolver esses problemas com triângulos. Basta ver que o triângulo obtusângulo ABC tem seus lados relacionados com os lados de dois triângulos retângulos ADC e BCD.



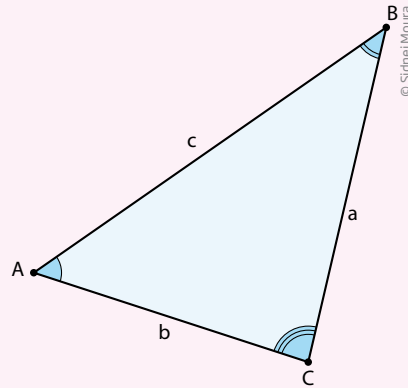
Dessas relações, surgiram outras. Algumas bem conhecidas são a **lei dos senos** e a **lei dos cossenos**.

- **Lei dos senos** – Em geral, é aplicada a triângulos acutângulos.

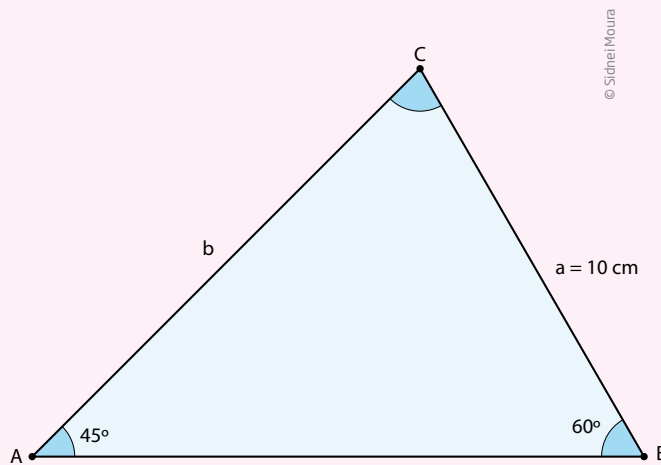
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Os lados são proporcionais aos senos dos ângulos.

Sabendo a medida dos ângulos e do lado entre eles, é possível determinar a medida do outro lado.



Veja um exemplo de aplicação:



Nesse triângulo, são conhecidos os ângulos $\hat{A} = 45^\circ$ e $\hat{B} = 60^\circ$ e a medida do lado $a = 10$ cm. Usando a lei dos senos, é possível calcular a medida do lado b . Para isso, deve-se consultar uma tabela semelhante àquela apresentada no Tema 1, com os valores de senos, cossenos e tangentes. Para os senos de 45° e 60° , os valores aproximados são:

$$\text{sen } 45^\circ = 0,71$$

$$\text{sen } 60^\circ = 0,87$$

Aplicando a lei dos senos:

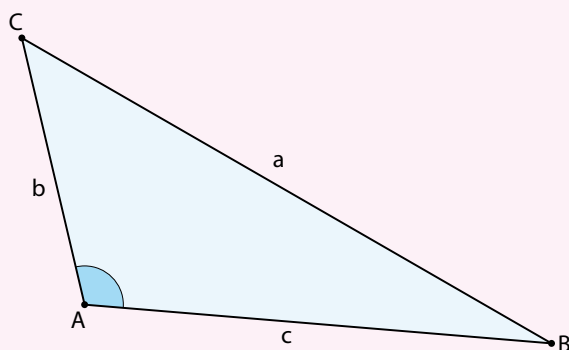
$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \Rightarrow \frac{10}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow \frac{10}{0,71} = \frac{b}{0,87} \Rightarrow b = \frac{8,7}{0,71} \approx 12,25$$

Considerando que o ângulo \hat{C} mede 75° , pois $45^\circ + 60^\circ + \hat{C} = 180^\circ$, e usando o mesmo raciocínio, é possível obter a medida do lado AB.

- **Lei dos cossenos** – Em geral, é aplicada a triângulos obtusângulos.

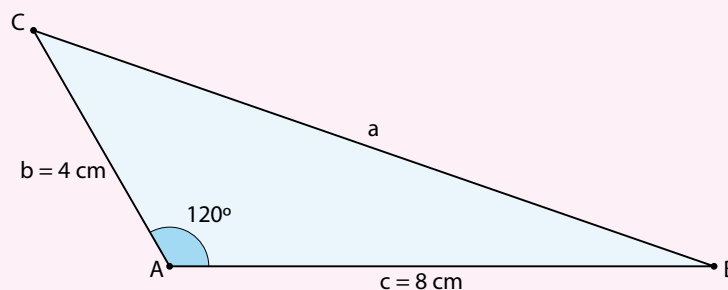
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \hat{A}$$

Sabendo a medida de dois lados e do ângulo entre eles, é possível determinar a medida do lado oposto.



© Sidnei Moura

Veja um exemplo de aplicação:



© Sidnei Moura

Nesse triângulo, são conhecidas as medidas dos lados $b = 4 \text{ cm}$ e $c = 8 \text{ cm}$, e do ângulo $\hat{A} = 120^\circ$. Usando a lei dos cossenos, determina-se a medida a do lado oposto ao ângulo \hat{A} :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos 120^\circ$$

Ao substituir pelos valores conhecidos, tem-se:

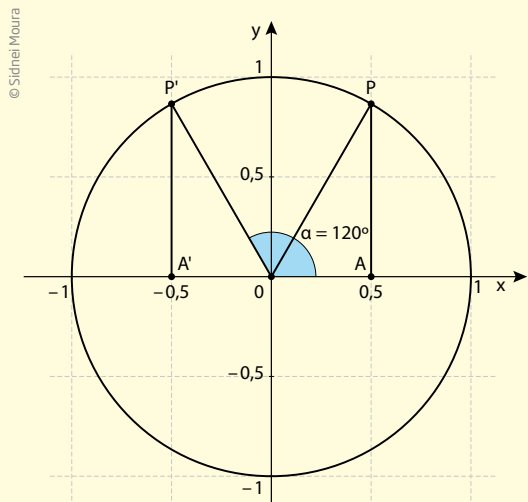
$$a^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ$$

Consultando uma tabela com as razões de senos, cossenos e tangentes, obtém-se o valor de $\cos 120^\circ = -0,5$.

$$a^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot (-0,5) = 16 + 64 - (-32) = 16 + 64 + 32 = 112$$

$$a^2 = 112 \Rightarrow a = \sqrt{112} \approx 10,6$$

O lado a mede $10,6 \text{ cm}$.



Observe que os triângulos OAP e $OA'P'$ são congruentes; logo, $AO = A'O$. Então, o valor de $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -0,5$.



A partir do século XVII, as razões trigonométricas eram calculadas com régua, compasso, lápis e papel, ou se consultava uma tabela.

As tabelas foram muito utilizadas até os anos 1980. Mas, agora, com a maior disponibilidade das calculadoras científicas e das calculadoras dos computadores, que têm teclas especiais relacionadas à Trigonometria, os valores de seno, cosseno e tangente podem ser obtidos de maneira mais rápida e precisa.



Calculadora científica.

Ângulos notáveis			
Ângulo	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Atualmente, a maioria dos cálculos trigonométricos necessários em variadas áreas profissionais – Topografia e Agrimensura, Física e Astronomia etc. – é realizada com uso de sofisticados programas de computador. Para os programadores de sistemas é suficiente saber somente as linguagens de programação ou, além disso, ter conhecimentos básicos da Trigonometria?

HORA DA CHECAGEM

Atividade 1 - Relações trigonométricas

1

- a) $\text{sen } 0^\circ = 0$ d) $\text{sen } 90^\circ = 1$
b) $\text{cos } 0^\circ = 1$ e) $\text{cos } 90^\circ = 0$
c) $\text{tg } 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$

2 Todas as alternativas estão corretas.**3** $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \rightarrow \text{como } \text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ, \text{ então } \text{tg } 45^\circ = 1.$ **4** $(\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2 = 1$

$$(0,6)^2 + (\text{cos } x)^2 = 1$$

$$(\text{cos } x)^2 = 1 - (0,6)^2 = 1 - 0,36 = 0,64 \Rightarrow \text{cos } x = \sqrt{0,64} = 0,8$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \rightarrow \text{tg } x = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4} = 0,75$$

5 Se $\text{sen } x = \text{cos } x$, então cateto oposto = cateto adjacente. Portanto, o triângulo retângulo que satisfaz a essa condição é o triângulo isósceles, pois os catetos são iguais. Como o ângulo oposto à hipotenusa é reto (mede 90°) e os ângulos opostos ao cateto são iguais, então $x + x = 90^\circ \Rightarrow x = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$. Ou seja, o ângulo em que os valores de seno e cosseno são iguais é 45° .

6

a) $(\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2 = 1 \Rightarrow (\text{sen } a)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$

$$(\text{sen } a)^2 = 1 - \frac{1}{16} \Rightarrow (\text{sen } a)^2 = \frac{15}{16} \Rightarrow \text{sen } a = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 0,97$$

b) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\text{cos } x} \rightarrow \text{tg } a = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = \sqrt{15} \approx 3,87$

7 $\text{cos } 20^\circ = \frac{12}{y}$

$$(\text{sen } x)^2 + (\text{cos } x)^2 = 1$$

$$(\text{sen } 20^\circ)^2 + (\text{cos } 20^\circ)^2 = 1$$

$$(0,34)^2 + (\text{cos } 20^\circ)^2 = 1 \Rightarrow \text{cos } 20^\circ = 0,94$$

$$\text{tg } 20^\circ = \frac{x}{12}$$

$$\text{tg } 20^\circ = \frac{0,34}{0,94} = 0,36$$

$$0,36 = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 12 \cdot 0,36 = 4,32 \text{ cm} \rightarrow \text{lado menor}$$

$$0,94 = \frac{12}{y} \Rightarrow y = \frac{12}{0,94} \approx 12,77 \text{ cm} \rightarrow \text{diagonal}$$

